



**СОЗДАНО
РАЗРАБОТЧИКАМИ**

ЕГЭ

50

**вариантов
заданий**

**К НОВОЙ ОФИЦИАЛЬНОЙ
ДЕМОНСТРАЦИОННОЙ ВЕРСИИ**

Под редакцией И. В. Ященко

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ЕГЭ

**ТИПОВЫЕ ВАРИАНТЫ
ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ
ЗАДАНИЙ**

2024

- **50 вариантов заданий**
- Инструкция по выполнению экзаменационной работы
- Ответы и решения
- Критерии оценивания
- Бланки ответов



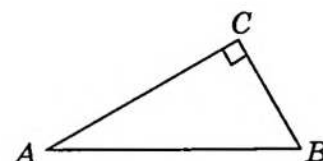
ВАРИАНТ 1

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

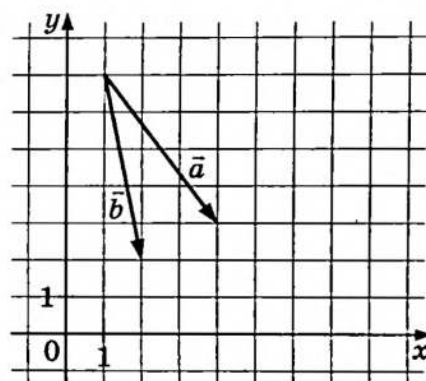
- 1 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 5$, $\sin A = \frac{7}{25}$. Найдите AC .

Ответ: _____.



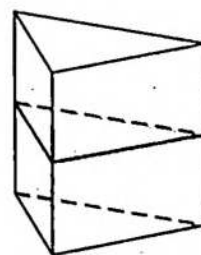
- 2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: _____.



- 3 В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 2300 см^3 воды и полностью погрузили в неё деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 25 см до отметки 27 см. Найдите объём детали. Ответ дайте в куб. см.

Ответ: _____.



- 4 Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,94. Вероятность того, что окажется меньше 15 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 15 до 19 включительно.

Ответ: _____.

- 5 Про случайную величину X известно, что $EX = 4$ и $DX = 10$. При помощи неравенства Чебышёва оцените вероятность события « $X \leq -1$ или $X \geq 9$ ».

Ответ: _____.

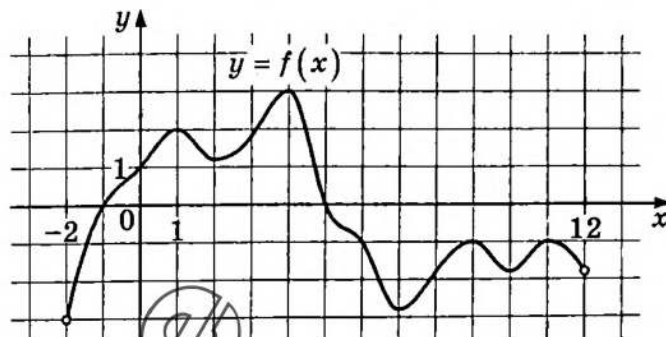
6 Найдите корень уравнения $\sqrt{57 - 7x} = 6$.

Ответ: _____.

7 Найдите значение выражения $\frac{18 \sin 174^\circ \cdot \cos 174^\circ}{\sin 348^\circ}$.

Ответ: _____.

8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 12)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



Ответ: _____.

9 Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In , оперативности Op , объективности Tr публикаций, а также качества Q сайта. Каждый отдельный показатель — целое число от -2 до 2 . Составители рейтинга считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций — впятеро дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{5In + Op + 3Tr + Q}{A}$$

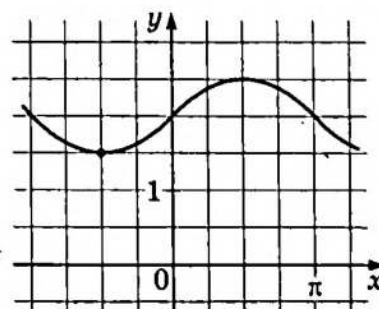
Если по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A , при котором это условие будет выполняться.

Ответ: _____.

10 Часы со стрелками показывают 8 часов 00 минут. Через сколько минут минутная стрелка в четвёртый раз поравняется с часовой?

Ответ: _____.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = a \sin x + b$. Найдите a .



Ответ: _____.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = 2x - \ln(x + 4)^2$ на отрезке $[-3; 5; 0]$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение
$$\frac{5 \sin^2\left(\pi + x\right) + 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{5 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 4} = 0.$$
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.
- 14 В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}$, $SB = \sqrt{85}$, $SD = \sqrt{57}$.
- а) Докажите, что плоскость SAC перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
- б) Найдите угол между прямыми SC и BD .
- 15 Решите неравенство $\log_{\sqrt{9+4x^2-12x}}(2x-3)^4 + \log_2 4^{(2x-3)^2} \leq 22.$
- 16 Вклад планируется открыть на три года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 20 % по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале второго и третьего годов вклад ежегодно пополняется на 1 млн рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором через три года вклад будет больше 8 млн рублей.
- 17 Точка P лежит на стороне AC равностороннего треугольника ABC . Окружность с диаметром BP пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Хорды MF и NE параллельны прямой BP . Отрезки FP и EP пересекают стороны AB и BC в точках T и S соответственно.
- а) Докажите, что треугольники APT и CSP подобны.
- б) Найдите отношение, в котором точка P делит отрезок AC , если площади треугольников APT и CSP относятся как 4 : 9.
- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение
$$\frac{2x^3 - (a+20)x^2 + 2a(5+a)x - a^3}{\sqrt{10-x+a}} = 0$$
 имеет ровно одно решение.
- 19 Из натурального числа вычли сумму его цифр и получили натуральное число A .
- а) Может ли A равняться 99?
- б) Может ли A равняться 1980?
- в) Найдите все натуральные числа, кратные 3, для которых $A = 22\,158$.



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

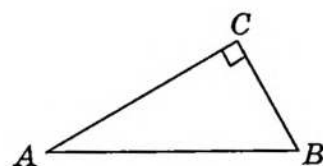
ВАРИАНТ 2

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

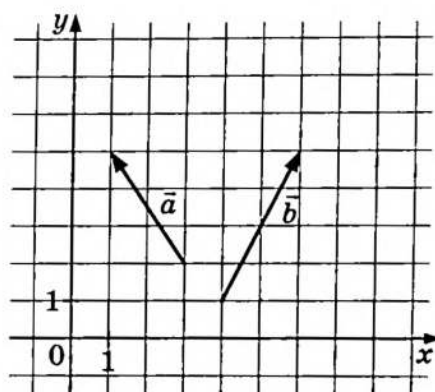
- 1 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 17$, $\sin A = \frac{8}{17}$. Найдите AC .

Ответ: _____.



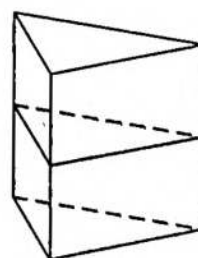
- 2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: _____.



- 3 В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 1500 см^3 воды и полностью погрузили в неё деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 20 см до отметки 25 см. Найдите объём детали. Ответ дайте в куб. см.

Ответ: _____.



- 4 Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 21 пассажира, равна 0,93. Вероятность того, что окажется меньше 12 пассажиров, равна 0,49. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 12 до 20 включительно.

Ответ: _____.

- 5 Про случайную величину X известно, что $EX = 4$ и $DX = 10$. При помощи неравенства Чебышёва оцените вероятность события « $X \leq 0$ или $X \geq 8$ ».

Ответ: _____.

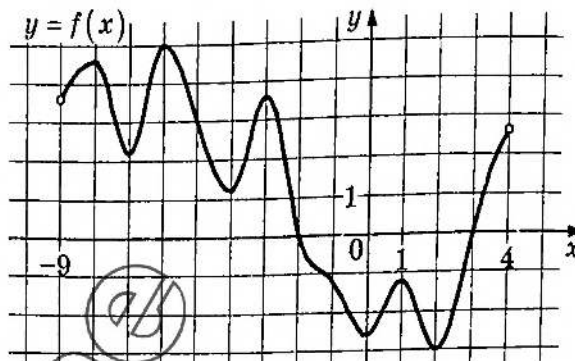
- 6 Найдите корень уравнения $\sqrt{30 - 7x} = 4$.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $\frac{50 \sin 142^\circ \cdot \cos 142^\circ}{\sin 284^\circ}$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 4)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



Ответ: _____.

- 9 Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In , оперативности Op , объективности Tr публикаций, а также качества Q сайта. Каждый отдельный показатель — целое число от 0 до 4. Составители рейтинга считают, что объективность ценится вчетверо, а информативность публикаций — впятеро дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{5In + Op + 4Tr + Q}{A}$$

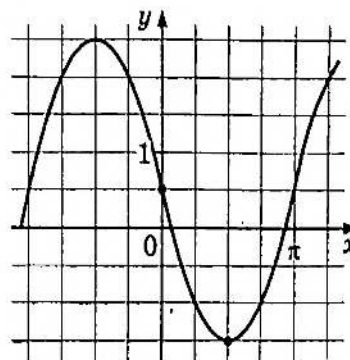
Если по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A , при котором это условие будет выполняться.

Ответ: _____.

- 10 Часы со стрелками показывают 11 часов 15 минут. Через сколько минут минутная стрелка в первый раз поравняется с часовой?

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = a \sin x + b$. Найдите a .



Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции $y = 6x - \ln(x + 6)^6$ на отрезке $[-5; 5; 0]$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение
$$\frac{13 \sin^2(2\pi - x) - 12 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}{13 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 5} = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

14 В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 10$ и $BC = 2\sqrt{11}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 2\sqrt{7}$, $SB = 8\sqrt{2}$, $SD = 6\sqrt{2}$.

а) Докажите, что плоскость SAC перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD .

15 Решите неравенство
$$\log_{\sqrt{12x+36x^2+1}}(6x+1)^6 - \log_3 27^{(6x+1)^2} \geq -6.$$

16 Вклад планируется открыть на три года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10 % по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале второго и третьего годов вклад ежегодно пополняется на 2 млн рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором через три года вклад будет больше 11 млн рублей.

17 Точка P лежит на стороне AC равностороннего треугольника ABC . Окружность с диаметром BP пересекает стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Хорды MF и NE параллельны прямой BP . Отрезки FP и EP пересекают стороны AB и BC в точках T и S соответственно.

а) Докажите, что треугольники APT и CSP подобны.

б) Найдите отношение, в котором точка P делит отрезок AC , если площади треугольников APT и CSP относятся как 25 : 49.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{4x^3 - (a+24)x^2 + 2a(3+2a)x - a^3}{\sqrt{6-x+a}} = 0$$

имеет ровно одно решение.

19 Из натурального числа вычли сумму его цифр и получили натуральное число A .

а) Может ли A равняться 117?

б) Может ли A равняться 2979?

в) Найдите все натуральные числа, кратные 4, для которых $A = 24\,345$.



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

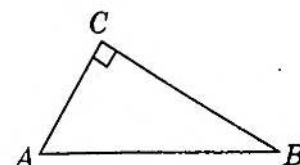
ВАРИАНТ 3

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

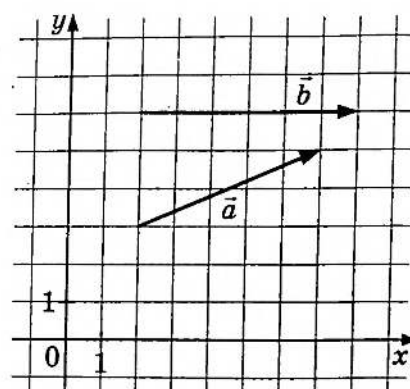
- 1 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 35$, $\sin A = \frac{4}{5}$. Найдите AC .

Ответ: _____.



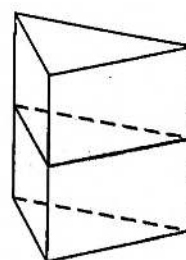
- 2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: _____.



- 3 В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 2300 см^3 воды и полностью погрузили в неё деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 25 см до отметки 27 см. Найдите объём детали. Ответ дайте в куб. см.

Ответ: _____.



- 4 Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 20 пассажиров, равна 0,81. Вероятность того, что окажется меньше 12 пассажиров, равна 0,56. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 12 до 19 включительно.

Ответ: _____.

- 5 Известно, что средний диаметр подшипника равен 15 мм, а стандартное отклонение от среднего диаметра равно 0,2 мм. При помощи неравенства Чебышёва оцените вероятность события «диаметр случайно выбранного подшипника отличается от среднего более чем на 0,5 мм».

Ответ: _____.

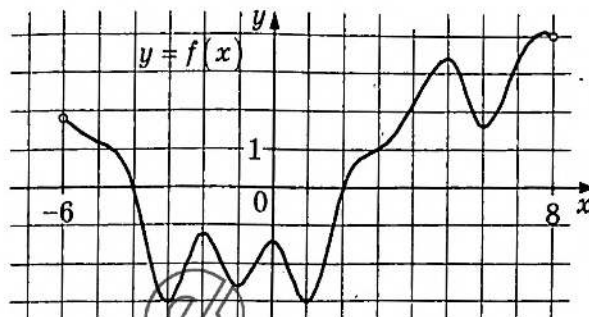
- 6 Найдите корень уравнения $\sqrt{53 - 4x} = 7$.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $\frac{4 \sin 112^\circ \cdot \cos 112^\circ}{\sin 224^\circ}$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 8)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



Ответ: _____.

- 9 Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In , оперативности Op , объективности Tr публикаций, а также качества Q сайта. Каждый отдельный показатель — целое число от -2 до 2 . Составители рейтинга считают, что объективность ценится втрое, а информативность публикаций — вчетверо дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{4In + Op + 3Tr + Q}{A}$$

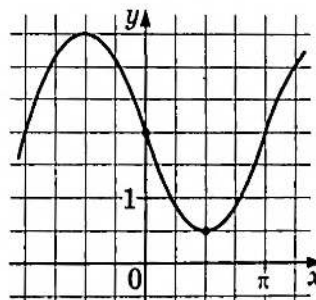
Если по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A , при котором это условие будет выполняться.

Ответ: _____.

- 10 Часы со стрелками показывают 4 часа 45 минут. Через сколько минут минутная стрелка в седьмой раз поравняется с часовой?

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = a \sin x + b$. Найдите a .



Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции $y = 10x - \ln(x + 14)^{10}$ на отрезке $[-13, 5; 0]$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $\frac{17 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 8 \cos(3\pi + x)}{17 \sin(5\pi - x) - 15} = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.
- 14 В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 12$ и $BC = 2\sqrt{13}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 16$, $SB = 20$, $SD = 2\sqrt{77}$.
- а) Докажите, что прямые SA и BD перпендикулярны.
- б) Найдите угол между прямыми SC и BD .
- 15 Решите неравенство $\log_{\sqrt{9x^2+64-48x}}(8-3x)^8 + \log_5 25^{(3x-8)^2} \leq 40$.
- 16 Вклад планируется открыть на три года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 20 % по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале второго и третьего годов вклад ежегодно пополняется на 2 млн рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором через три года вклад будет больше 15 млн рублей.
- 17 Точка P лежит на стороне AC равностороннего треугольника ABC . Окружность с диаметром BP пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Хорды MF и NE параллельны прямой BP . Отрезки FP и EP пересекают стороны AB и BC в точках T и S соответственно.
- а) Докажите, что треугольники APT и CSP подобны.
- б) Найдите отношение, в котором точка P делит отрезок AC , если площади треугольников APT и CSP относятся как 16 : 25.
- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение
$$\frac{5x^3 - (a+60)x^2 + a(12+5a)x - a^3}{\sqrt{12-x+a}} = 0$$
 имеет ровно одно решение.
- 19 Из натурального числа вычли сумму его цифр и получили натуральное число A .
- а) Может ли A равняться 126?
- б) Может ли A равняться 2988?
- в) Найдите все чётные натуральные числа, для которых $A = 15\,372$.



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

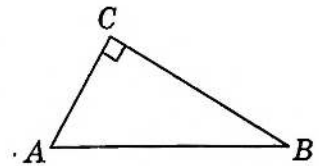
ВАРИАНТ 4

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

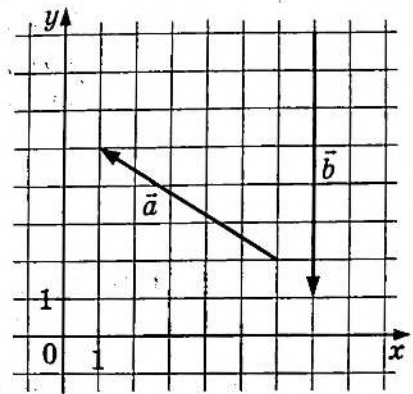
- 1 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 12$, $\sin A = \frac{\sqrt{51}}{10}$. Найдите AC .

Ответ: _____.



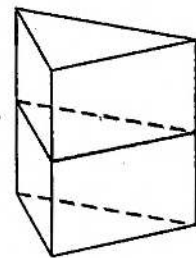
- 2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: _____.



- 3 В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 1900 см^3 воды и полностью погрузили в неё деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 20 см до отметки 22 см . Найдите объём детали. Ответ дайте в куб. см.

Ответ: _____.



- 4 Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 22 пассажиров, равна $0,86$. Вероятность того, что окажется меньше 9 пассажиров, равна $0,5$. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 9 до 21 включительно.

Ответ: _____.

- 5 Известно, что средний диаметр подшипника равен 24 мм , а стандартное отклонение от среднего диаметра равно $0,4 \text{ мм}$. При помощи неравенства Чебышёва оцените вероятность события «диаметр случайно выбранного подшипника отличается от среднего более чем на $0,8 \text{ мм}$ ».

Ответ: _____.

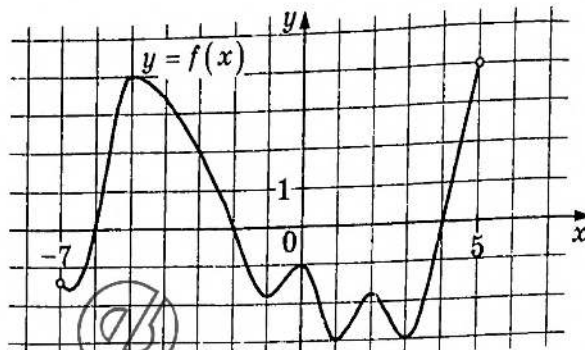
- 6 Найдите корень уравнения $\sqrt{51 - 2x} = 5$.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $\frac{258 \sin 179^\circ \cdot \cos 179^\circ}{\sin 358^\circ}$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 5)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



Ответ: _____.

- 9 Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности Ip , оперативности Op , объективности Tr публикаций, а также качества Q сайта. Каждый отдельный показатель — целое число от 0 до 4. Составители рейтинга считают, что объективность ценится вдвое, а информативность публикаций — вдвое дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{3Ip + Op + 2Tr + Q}{A}.$$

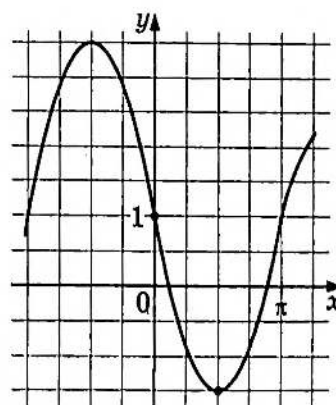
Если по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A , при котором это условие будет выполняться.

Ответ: _____.

- 10 Часы со стрелками показывают 10 часов 35 минут. Через сколько минут минутная стрелка во второй раз поравняется с часовой?

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = a \sin x + b$. Найдите a .



Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции $y = 12x - \ln(x + 20)^{12}$ на отрезке $[-19, 5; 0]$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение
$$\frac{25 \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 24 \cos(\pi - x)}{25 \cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) - 7} = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

14 В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 5\sqrt{2}$ и $BC = \sqrt{14}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 6$, $SB = \sqrt{86}$, $SD = 5\sqrt{2}$.

а) Докажите, что прямые SA и BD перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD .

15 Решите неравенство
$$\log_{\sqrt{25x^2 - 110x + 121}}(11 - 5x)^{10} - \log_7 49^{(5x-11)^2} \geq -40.$$

16 Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 20 % по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 1 млн рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет больше 12 млн рублей.

17 Точка P лежит на стороне AC равностороннего треугольника ABC . Окружность с диаметром BP пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Хорды MF и NE параллельны прямой BP . Отрезки FP и EP пересекают стороны AB и BC в точках T и S соответственно.

а) Докажите, что треугольники APT и CSP подобны.

б) Найдите отношение, в котором точка P делит отрезок AC , если площади треугольников APT и CSP относятся как 49 : 121.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{3x^3 - 2(a+6)x^2 + a(8+3a)x - 2a^3}{\sqrt{4-x+a}} = 0$$

имеет ровно одно решение.

19 Из натурального числа вычли сумму его цифр и получили натуральное число A .

а) Может ли A равняться 135?

б) Может ли A равняться 3978?

в) Найдите все натуральные числа, кратные 3, для которых $A = 41\,139$.



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

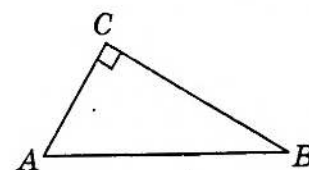
ВАРИАНТ 5

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

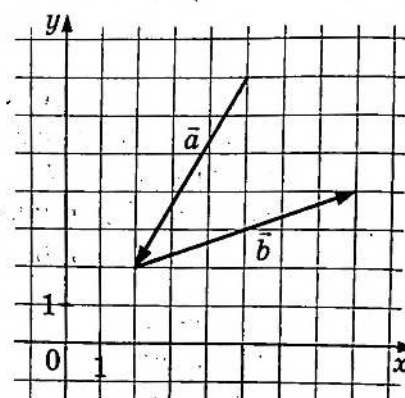
- 1 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 25$, $\sin A = \frac{\sqrt{51}}{10}$. Найдите AC .

Ответ: _____.



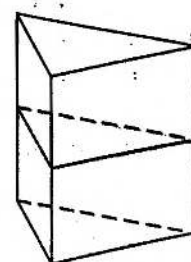
- 2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: _____.



- 3 В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 1500 см^3 воды и полностью погрузили в неё деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 25 см до отметки 28 см. Найдите объём детали. Ответ дайте в куб. см.

Ответ: _____.



- 4 Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 24 пассажиров, равна 0,86. Вероятность того, что окажется меньше 11 пассажиров, равна 0,63. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 11 до 23 включительно.

Ответ: _____.

- 5 Известно, что средняя масса упаковки наполнителя для игрушек равна 500 г, а стандартное отклонение от средней массы равно 40 г. При помощи неравенства Чебышёва оцените вероятность события «масса наполнителя в случайно выбранной упаковке отличается от средней более чем на 75 г». Ответ округлите до тысячных.

Ответ: _____.

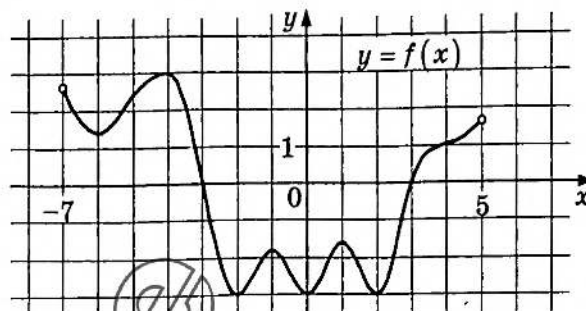
- 6 Найдите корень уравнения $\sqrt{42 - 3x} = 3$.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения, если $\frac{18 \sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ}{\sin 80^\circ}$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 5)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



Ответ: _____.

- 9 Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе оценок информативности In , оперативности Op , объективности Tr публикаций, а также качества Q сайта. Каждый отдельный показатель — целое число от 1 до 5. Составители рейтинга считают, что объективность ценится вдвое, а информативность публикаций — вчетверо дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{4In + Op + 2Tr + Q}{A}$$

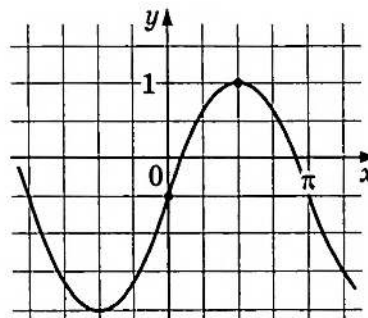
Если по всем четырём показателям какое-то издание получило одну и ту же оценку, то рейтинг должен совпадать с этой оценкой. Найдите число A , при котором это условие будет выполняться.

Ответ: _____.

- 10 Часы со стрелками показывают 8 часов 55 минут. Через сколько минут минутная стрелка в третий раз поравняется с часовой?

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = a \sin x + b$. Найдите a .



Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции $y = 11x - \ln(x + 4)^{11}$ на отрезке $[-3, 5; 0]$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение
$$\frac{29 \cos^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - 21 \sin(x - \pi)}{29 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 20} = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

14 В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2\sqrt{5}$ и $BC = 4$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 10$, $SB = 2\sqrt{30}$, $SD = 2\sqrt{29}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD .

15 Решите неравенство $\log_{\sqrt{49x^2 - 28x + 4}}(7x - 2)^2 + \log_3 81^{(7x - 2)^2} \leq 6.$

16 Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10 % по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 2 млн рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет больше 14 млн рублей.

17 Точка P лежит на стороне AC равностороннего треугольника ABC . Окружность с диаметром BP пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Хорды MF и NE параллельны прямой BP . Отрезки FP и EP пересекают стороны AB и BC в точках T и S соответственно.

а) Докажите, что треугольники APT и CSP подобны.

б) Найдите отношение, в котором точка P делит отрезок AC , если площади треугольников APT и CSP относятся как 49 : 64.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{3x^3 - (a + 24)x^2 + a(8 + 3a)x - a^3}{\sqrt{8 - x + a}} = 0$$

имеет ровно одно решение.

19 Из натурального числа вычли сумму его цифр и получили натуральное число A .

а) Может ли A равняться 108?

б) Может ли A равняться 1989?

в) Найдите все натуральные числа, кратные 3, для которых $A = 31\,203$.



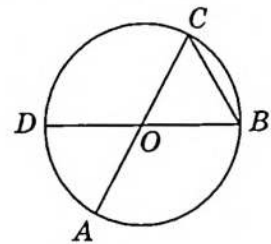
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ВАРИАНТ 6

Часть 1

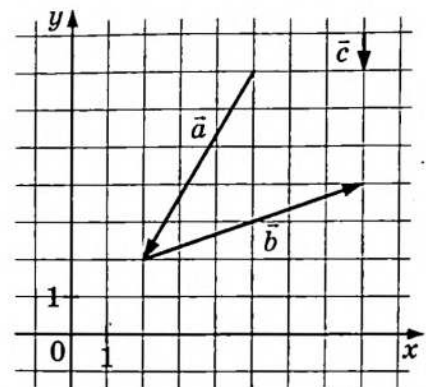
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Отрезки AC и BD — диаметры окружности с центром O . Угол ACB равен 38° . Найдите угол AOD .
Ответ дайте в градусах.



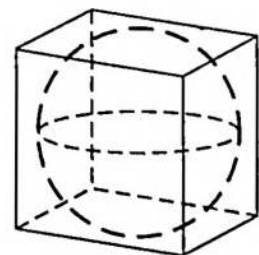
Ответ: _____.

- 2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с целочисленными координатами. Найдите длину вектора $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.



Ответ: _____.

- 3 Куб описан около сферы радиуса 8,5. Найдите объём куба.



Ответ: _____.

- 4 За круглый стол на 201 стул в случайном порядке рассаживаются 199 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.

Ответ: _____.

- 5 В таблице показано распределение случайной величины X . Найдите EX — математическое ожидание этой случайной величины.

Значения X	-4	0	1	3
Вероятности	0,2	0,1	0,4	0,3

Ответ: _____.

6 Найдите корень уравнения $\log_{27} 3^{2x+3} = 2$.

Ответ: _____.

7 Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{x}-7}{\sqrt{x}} + \frac{7\sqrt{x}}{x} + 5x - 2$ при $x = 3$.

Ответ: _____.

8 Прямая $y = 2x + 37$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 7x + 10$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: _____.

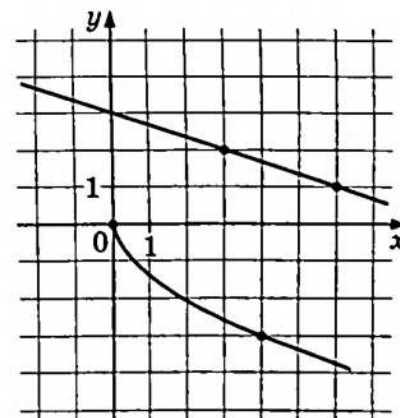
9 Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу со скоростью $v = 6$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью $u = \frac{m}{m+M} v \cos \alpha$ (м/с), где $m = 80$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 400$ кг — масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,5 м/с?

Ответ: _____.

10 Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 25 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 30 часов после отплытия из него. Сколько километров прошёл теплоход за весь рейс?

Ответ: _____.

11 На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точке A. Найдите абсциссу точки A.



Ответ: _____.

12 Найдите точку максимума функции $y = (x-3)^2 e^{x-7}$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $256^{\sin x \cos x} - 18 \cdot 16^{\sin x \cos x} + 32 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ через середины боковых рёбер SA и SB перпендикулярно основанию ABC проведена плоскость α .

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания пирамиды в отношении $5 : 1$, считая от вершины C .

б) Найдите объём пирамиды с вершиной в точке C , основанием которой служит сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α , если $AB = 60$, $SA = 37$.

15 Решите неравенство $\frac{16^x - 2^{3+2x} + 16}{16^x - 7 \cdot 4^x + 10} \geq 0$.

16 В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2025	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028	Июль 2029
Долг (в млн рублей)	S	$0,8S$	$0,5S$	$0,3S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором каждая из выплат будет меньше 2 млн рублей.

17 На диагонали LN параллелограмма $KLMN$ отмечены точки P и Q , причём $LP = PQ = QN$. Прямые KP и KQ пересекают прямую LM в точках R и T соответственно.

а) Докажите, что $LR : RT = 1 : 3$.

б) Найдите площадь параллелограмма $KLMN$, если площадь пятиугольника $PRMSQ$, где S — точка пересечения прямой KQ со стороной, равна 15.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{4x^3 - 3ax^2 + 4(a^2 - 25)x - 3a^3 + 75a}{\sqrt{x^2 + a^2 - 9}} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

- 19** Одноклассники Петя и Вася играют в игру. Петя записывает на доске число m , а затем Вася выбирает нечётное натуральное число $n > 1$ и записывает на доске число

$$\left(1 + \frac{2}{3^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{5^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{2}{n^2}\right).$$

Побеждает тот, чье число окажется большим.

- а) Кто победит, если $m = \frac{6}{5}$, $n = 7$?
- б) Кто победит, если $m = \frac{13}{10}$, $n = 13$?
- в) Кто победит, если $m = \frac{14}{5}$, $n = 2023$?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

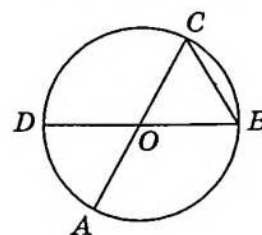
sbornik.me

ВАРИАНТ 7

Часть 1

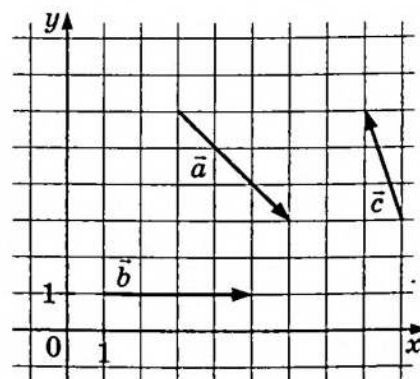
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Отрезки AC и BD — диаметры окружности с центром O . Угол ACB равен 79° . Найдите угол AOD . Ответ дайте в градусах.



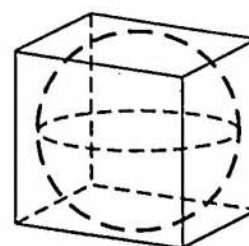
Ответ: _____.

- 2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с целочисленными координатами. Найдите длину вектора $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.



Ответ: _____.

- 3 Куб описан около сферы радиуса 7. Найдите объём куба.



Ответ: _____.

- 4 За круглый стол на 201 стул в случайном порядке рассаживаются 199 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что между двумя девочками будет сидеть ровно один мальчик.

Ответ: _____.

- 5 В таблице показано распределение случайной величины X . Найдите EX — математическое ожидание этой случайной величины.

Значения X	-5	1	2	3
Вероятности	0,3	0,2	0,3	0,2

Ответ: _____.

6 Найдите корень уравнения $\log_{16} 2^{5x-6} = 4$.

Ответ: _____.

7 Найдите значение выражения $\frac{11\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{x} + 2x - 1$ при $x = 3$.

Ответ: _____.

8 Прямая $y = -2x - 12$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 2x^2 - 6x - 4$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: _____.

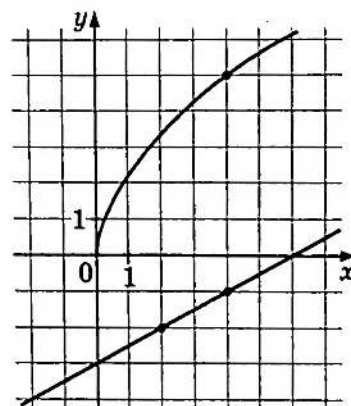
9 Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу со скоростью $v = 3,2$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью $u = \frac{m}{m+M} v \cos \alpha$ (м/с), где $m = 75$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 225$ кг — масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до $0,4$ м/с?

Ответ: _____.

10 Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 22 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 1 км/ч, стоянка длится 6 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 50 часов после отплытия из него. Сколько километров прошёл теплоход за весь рейс?

Ответ: _____.

11 На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точке A . Найдите абсциссу точки A .



Ответ: _____.

12 Найдите точку максимума функции $y = (x-6)^2 e^{x-3}$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13** а) Решите уравнение $81^{\cos 2x} - 84 \cdot 9^{2\cos^2 x - 1} + 3 \cdot 9^2 = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$.
- 14** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ через середины боковых рёбер SA и SB перпендикулярно основанию ABC проведена плоскость α .
 а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания пирамиды в отношении $5 : 1$, считая от вершины C .
 б) Найдите объём пирамиды с вершиной в точке C , основанием которой служит сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α , если $AB = 12$, $SA = \sqrt{219}$.
- 15** Решите неравенство $\frac{81^x - 2 \cdot 9^{x+1} + 81}{81^x - 14 \cdot 9^x + 33} \geq 0$.
- 16** В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:
 – каждый январь долг увеличивается на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
 – с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
 – в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.
- | Месяц и год | Июль 2025 | Июль 2026 | Июль 2027 | Июль 2028 | Июль 2029 |
|---------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Долг (в млн рублей) | S | $0,75S$ | $0,4S$ | $0,15S$ | 0 |
- Найдите наибольшее значение S , при котором каждая из выплат будет меньше 4 млн рублей.
- 17** На диагонали LN параллелограмма $KLMN$ отмечены точки P и Q , причём $LP = PQ = QN$. Прямые KP и KQ пересекают прямую LM в точках R и T соответственно.
 а) Докажите, что $LR : RT = 1 : 3$.
 б) Найдите площадь параллелограмма $KLMN$, если площадь пятиугольника $PRMSQ$, где S — точка пересечения прямой KQ со стороной, равна 8.
- 18** Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{24x^3 - 7ax^2 + 24(a^2 - 625)x - 7a^3 + 4375a}{\sqrt{x^2 + a^2 - 225}} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

- 19 Одноклассники Петя и Вася играют в игру. Петя записывает на доске число m , а затем Вася выбирает нечётное натуральное число $n > 1$ и записывает на доске число

$$\left(1 + \frac{2}{3^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{5^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{2}{n^2}\right).$$

Побеждает тот, чьё число окажется большим.

- а) Кто победит, если $m = \frac{3}{2}$, $n = 7$?
- б) Кто победит, если $m = \frac{17}{13}$, $n = 11$?
- в) Кто победит, если $m = \frac{29}{10}$, $n = 1005$?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

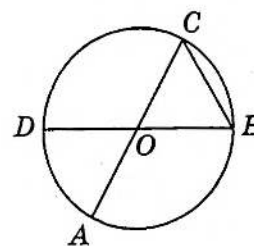
ВАРИАНТ 8

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

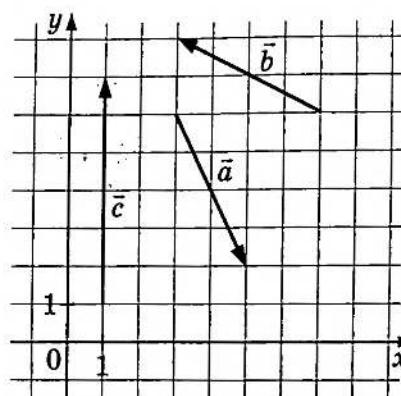
- 1 Отрезки AC и BD — диаметры окружности с центром O . Угол ACB равен 6° . Найдите угол AOD . Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.



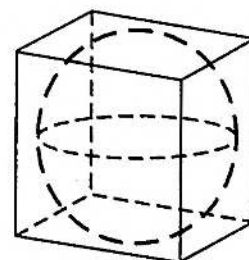
- 2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с целочисленными координатами. Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Ответ: _____.



- 3 Куб описан около сферы радиуса 6,5. Найдите объём куба.

Ответ: _____.



- 4 За круглый стол на 201 стул в случайном порядке рассаживаются 199 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки не будут сидеть рядом.

Ответ: _____.

- 5 В таблице показано распределение случайной величины X . Найдите EX — математическое ожидание этой случайной величины.

Значения X	-1	2	4	6
Вероятности	0,6	0,1	0,2	0,1

Ответ: _____.

6 Найдите корень уравнения $\log_{16} 2^{2x-7} = 3$.

Ответ: _____.

7 Найдите значение выражения $\frac{5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{x} + x - 3$ при $x = 3$.

Ответ: _____.

8 Прямая $y = 8x - 9$ является касательной к графику функции $y = x^3 + x^2 + 8x - 9$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: _____.

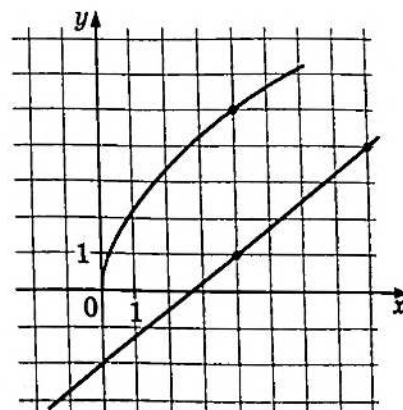
9 Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу со скоростью $v = 4,8$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью $u = \frac{m}{m+M} v \cos \alpha$ (м/с), где $m = 70$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 350$ кг — масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,4 м/с?

Ответ: _____.

10 Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 20 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 4 км/ч, стоянка длится 6 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 36 часов после отплытия из него. Сколько километров прошёл теплоход за весь рейс?

Ответ: _____.

11 На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точке А. Найдите абсциссу точки А.



Ответ: _____.

12 Найдите точку максимума функции $y = (x+14)^2 e^{x-31}$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13** а) Решите уравнение $4^{\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x} - 9 \cdot 2^{\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x} + 14 = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.
- 14** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ через середины боковых рёбер SA и SB перпендикулярно основанию ABC проведена плоскость α .
 а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания пирамиды в отношении $5 : 1$, считая от вершины C .
 б) Найдите объём пирамиды с вершиной в точке C , основанием которой служит сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α , если $AB = 18$, $SA = \sqrt{59}$.

15 Решите неравенство $\frac{49^x - 2 \cdot 7^{x+1} + 49}{49^{x+0,5} - 64 \cdot 7^x + 9} \geq 0$.

- 16** В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг увеличивается на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
 - в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2025	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028	Июль 2029
Долг (в млн рублей)	S	$0,7S$	$0,4S$	$0,2S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором каждая из выплат будет меньше 2 млн рублей.

- 17** На диагонали LN параллелограмма $KLMN$ отмечены точки P и Q , причём $LP = PQ = QN$. Прямые KP и KQ пересекают прямую LM в точках R и T соответственно.
 а) Докажите, что $LR : RT = 1 : 3$.
 б) Найдите площадь параллелограмма $KLMN$, если площадь пятиугольника $PRMSQ$, где S — точка пересечения прямой KQ со стороной, равна 10.

- 18** Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{12x^3 - 5ax^2 + 12(a^2 - 169)x - 5a^3 + 845a}{\sqrt{x^2 + a^2 - 36}} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

- 19 Одноклассники Петя и Вася играют в игру. Петя записывает на доске число m , а затем Вася выбирает нечётное натуральное число $n > 1$ и записывает на доске число

$$\left(1 + \frac{2}{3^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{5^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{2}{n^2}\right).$$

Побеждает тот, чьё число окажется большим.

- а) Кто победит, если $m = \frac{10}{7}$, $n = 5$?
б) Кто победит, если $m = \frac{5}{4}$, $n = 11$?
в) Кто победит, если $m = \frac{26}{9}$, $n = 1147$?



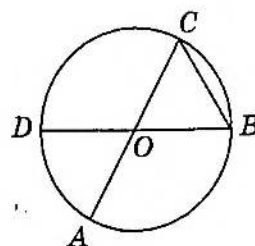
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ВАРИАНТ 9

Часть 1

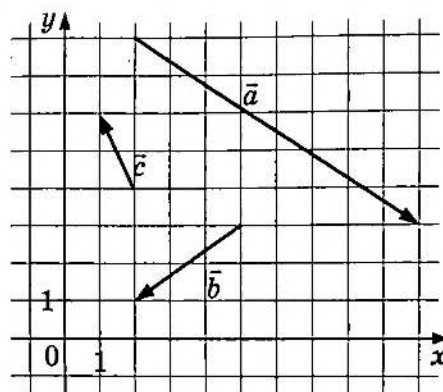
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Отрезки AC и BD — диаметры окружности с центром O . Угол ACB равен 54° . Найдите угол AOD . Ответ дайте в градусах.



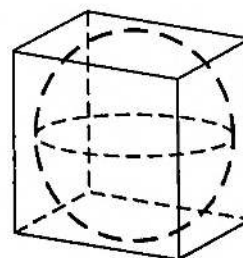
Ответ: _____.

- 2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с целочисленными координатами. Найдите длину вектора $\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}$.



Ответ: _____.

- 3 Куб описан около сферы радиуса 6. Найдите объём куба.



Ответ: _____.

- 4 За круглый стол на 201 стул в случайном порядке рассаживаются 199 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.

Ответ: _____.

- 5 В таблице показано распределение случайной величины X . Найдите EX — математическое ожидание этой случайной величины.

Значения X	-3	0	2	3
Вероятности	0,6	0,1	0,2	0,1

Ответ: _____.

6 Найдите корень уравнения $\log_9 3^{2x-9} = 2$.

Ответ: _____.

7 Найдите значение выражения $\frac{10\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} + x + 6$ при $x = 2$.

Ответ: _____.

8 Прямая $y = -2x + 6$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 + x + 5$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: _____.

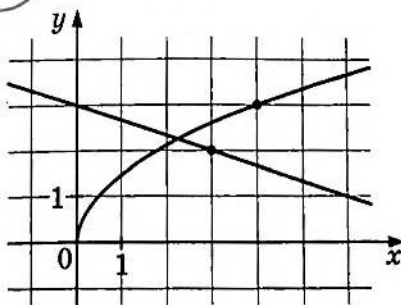
9 Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу со скоростью $v = 3,6$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью $u = \frac{m}{m+M} v \cos \alpha$ (м/с), где $m = 75$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 375$ кг — масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до $0,3$ м/с?

Ответ: _____.

10 Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 18 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 3 часа, а в исходный пункт теплоход возвращается через 55 часов после отплытия из него. Сколько километров прошёл теплоход за весь рейс?

Ответ: _____.

11 На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точке А. Найдите абсциссу точки А.



Ответ: _____.

12 Найдите точку максимума функции $y = (x-10)^2 e^{x-8}$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $9^{\sqrt{3} \cos x - \sin x} - 13 \cdot 3^{\sqrt{3} \cos x - \sin x} + 30 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ через середины боковых рёбер SA и SB перпендикулярно основанию ABC проведена плоскость α .

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания пирамиды в отношении $5 : 1$, считая от вершины C .

б) Найдите объём пирамиды с вершиной в точке E , основанием которой служит сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α , если $AB = 30$, $SA = 20$.

15 Решите неравенство $\frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 9}{9^{x+1} - 91 \cdot 3^x + 10} \geq 0$.

16 В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2025	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028
Долг (в млн рублей)	S	$0,6S$	$0,3S$	$0,2S$

Найдите наибольшее значение S , при котором каждая из выплат будет меньше 2 млн рублей.

17 На диагонали LN параллелограмма $KLMN$ отмечены точки P и Q , причём $LP = PQ = QN$. Прямые KP и KQ пересекают прямую LM в точках R и T соответственно.

а) Докажите, что $LR : RT = 1 : 3$.

б) Найдите площадь параллелограмма $KLMN$, если площадь пятиугольника $PRMSQ$, где S — точка пересечения прямой KQ со стороной, равна 4.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{15x^3 - 8ax^2 + 15(a^2 - 289)x - 8a^3 + 2312a}{\sqrt{x^2 + a^2 - 100}} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

- 19 Одноклассники Петя и Вася играют в игру. Петя записывает на доске число m , а затем Вася выбирает нечётное натуральное число $n > 1$ и записывает на доске число

$$\left(1 + \frac{2}{3^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{5^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{2}{n^2}\right).$$

Побеждает тот, чьё число окажется большим.

- а) Кто победит, если $m = \frac{7}{6}$, $n = 7$?
- б) Кто победит, если $m = \frac{8}{5}$, $n = 13$?
- в) Кто победит, если $m = \frac{17}{6}$, $n = 1703$?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

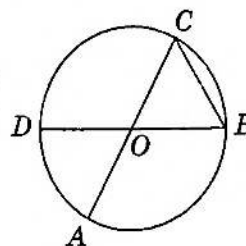
sbornik.me

ВАРИАНТ 10

Часть 1

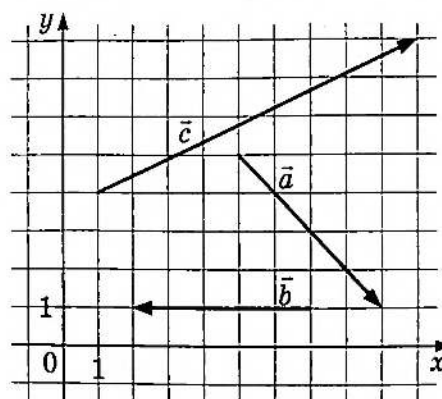
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Отрезки AC и BD — диаметры окружности с центром O . Угол ACB равен 80° . Найдите угол AOD . Ответ дайте в градусах.



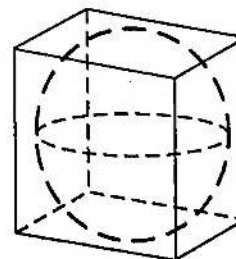
Ответ: _____.

- 2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с целочисленными координатами. Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$.



Ответ: _____.

- 3 Куб описан около сферы радиуса 1. Найдите объём куба.



Ответ: _____.

- 4 За круглый стол на 101 стул в случайном порядке рассаживаются 99 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.

Ответ: _____.

- 5 В таблице показано распределение случайной величины X . Найдите EX — математическое ожидание этой случайной величины.

Значения X	-5	-2	0	8
Вероятности	0,1	0,3	0,2	0,4

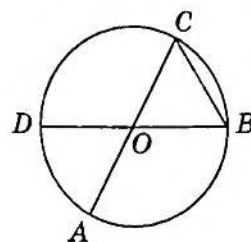
Ответ: _____.

ВАРИАНТ 10

Часть 1

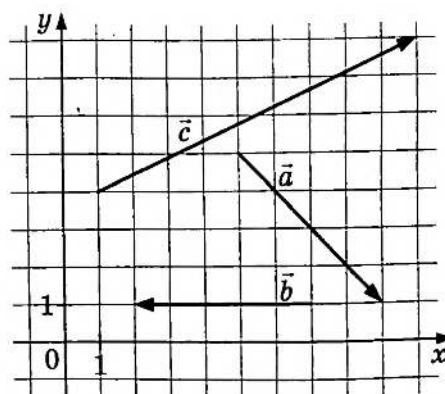
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Отрезки AC и BD — диаметры окружности с центром O . Угол ACB равен 80° . Найдите угол AOD . Ответ дайте в градусах.



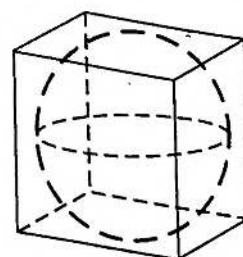
Ответ: _____.

- 2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с целочисленными координатами. Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$.



Ответ: _____.

- 3 Куб описан около сферы радиуса 1. Найдите объём куба.



Ответ: _____.

- 4 За круглый стол на 101 стул в случайном порядке рассаживаются 99 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки будут сидеть рядом.

Ответ: _____.

- 5 В таблице показано распределение случайной величины X . Найдите EX — математическое ожидание этой случайной величины.

Значения X	-5	-2	0	8
Вероятности	0,1	0,3	0,2	0,4

Ответ: _____.

6 Найдите корень уравнения $\log_{81} 3^{8x-7} = 2$.

Ответ: _____.

7 Найдите значение выражения $\frac{10\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{x} + 5x + 2$ при $x = 3$.

Ответ: _____.

8 Прямая $y = x + 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 5x^2 + 9x + 15$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: _____.

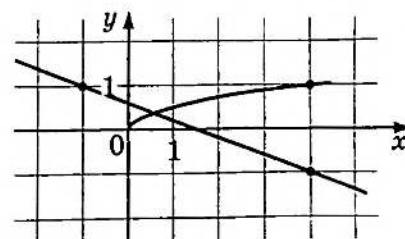
9 Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу со скоростью $v = 3$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью $u = \frac{m}{m+M} v \cos \alpha$ (м/с), где $m = 70$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 350$ кг — масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,25 м/с?

Ответ: _____.

10 Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 15 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 7 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 57 часов после отплытия из него. Сколько километров прошёл теплоход за весь рейс?

Ответ: _____.

11 На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точке A. Найдите абсциссу точки A.



Ответ: _____.

12 Найдите точку максимума функции $y = (x+16)^2 e^{x-10}$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $4^{\sin x + \sqrt{3} \cos x} - 2^{\sin x + \sqrt{3} \cos x + 3} + 12 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -2\pi]$.

- 14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ через середины боковых рёбер SA и SB перпендикулярно основанию ABC проведена плоскость α .
- а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания пирамиды в отношении $5 : 1$, считая от вершины C .
- б) Найдите объём пирамиды с вершиной в точке E , основанием которой служит сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α , если $AB = 24$, $SA = \sqrt{291}$.

15 Решите неравенство $\frac{25^{x+1} - 10 \cdot 5^x + 1}{6 \cdot 25^x - 7 \cdot 5^x + 1} \geq 0$.

- 16 В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг увеличивается на 16 % по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
 - в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2025	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028
Долг (в млн рублей)	S	$0,7S$	$0,3S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором каждая из выплат будет меньше 3 млн рублей.

- 17 На диагонали LN параллелограмма $KLMN$ отмечены точки P и Q , причём $LP = PQ = QN$. Прямые KP и KQ пересекают прямую LM в точках R и T соответственно.
- а) Докажите, что $LR : RT = 1 : 3$.
- б) Найдите площадь параллелограмма $KLMN$, если площадь пятиугольника $PRMSQ$, где S — точка пересечения прямой KQ со стороной, равна 7.

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{3x^3 - 4ax^2 + 3(a^2 - 100)x - 4a^3 + 400a}{\sqrt{x^2 + a^2 - 16}} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

- 19 Одноклассники Петя и Васа играют в игру. Петя записывает на доске число m , а затем Васа выбирает нечётное натуральное число $n > 1$ и записывает на доске число

$$\left(1 + \frac{2}{3^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{5^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{2}{n^2}\right).$$

Побеждает тот, чьё число окажется большим.

- а) Кто победит, если $m = \frac{7}{5}$, $n = 5$?
- б) Кто победит, если $m = \frac{4}{3}$, $n = 13$?
- в) Кто победит, если $m = \frac{20}{7}$, $n = 859$?



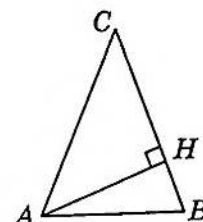
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ВАРИАНТ 11

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 В треугольнике ABC известно, что $AC = BC$, $AB = 16$, $\cos BAC = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите высоту AH .



Ответ: _____

- 2 Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны соответственно 4 и 30, а их скалярное произведение равно 120. Найдите длину вектора $\vec{c}$, если $\vec{c} = \vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$.

Ответ: _____

- 3 Если каждое ребро куба увеличить на 2, то его объём увеличится на 152. Найдите ребро куба.

Ответ: _____

- 4 В группе шесть человек, среди них — Сергей и Ольга. Группу случайным образом делят на 2 равные по численности подгруппы. Найдите вероятность того, что Сергей и Ольга окажутся в одной подгруппе.

Ответ: _____

- 5 Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 35 % яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 15 % яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 30 % яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Ответ: _____

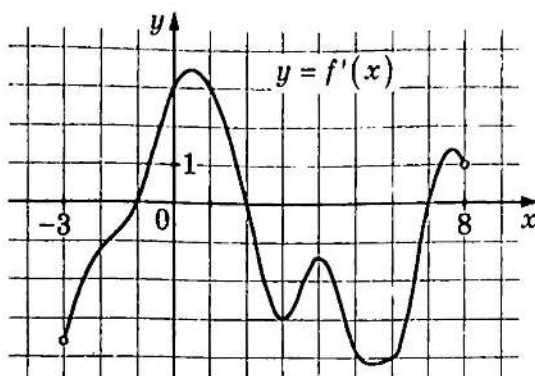
- 6 Найдите корень уравнения $7^{5x+2} = 0,7 \cdot 10^{5x+2}$.

Ответ: _____

- 7 Найдите значение выражения $\sqrt{32} \cos^2 \frac{13\pi}{8} - \sqrt{8}$.

Ответ: _____

- 8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x + 5$ или совпадает с ней.



Ответ: _____.

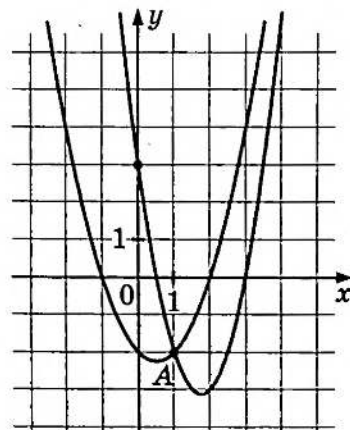
- 9 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 2 + 11t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 4 метров?

Ответ: _____.

- 10 Саше надо решить 130 задач. Ежедневно он решает на одно и то же количество задач больше по сравнению с предыдущим днём. Известно, что за первый день Саша решил 14 задач. Определите, сколько задач решил Саша в последний день, если со всеми задачами он справился за 5 дней.

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображены графики функций $f(x) = x^2 - x - 2$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .



Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 - 3x + \ln x + 10$ на отрезке $\left[\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right]$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13** а) Решите уравнение $4 \sin x \cos^2 x - 1 = 2 \cos x (\sin x - 1)$.
 б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.
- 14** В правильной треугольной пирамиде $MAVC$ двугранный угол при основании равен $\arctg 2$. Через точку K ребра MC и вершины A и B проходит плоскость α так, что площадь сечения пирамиды плоскостью α относится к площади основания как $1 : \sqrt{2}$.
 а) Докажите, что прямая MC перпендикулярна плоскости α .
 б) Найдите объём пирамиды $MAVK$, если объём пирамиды $MAVC$ равен $24\sqrt{7}$.
- 15** Решите неравенство $\frac{4x^3 + 4x^2 - 7x + 2}{2 - 11 \cdot 2^{1-x} + 3 \cdot 4^{2-x}} \leq 0$.
- 16** Андрей планирует 12 декабря взять в банке кредит на 3 года в размере 6 556 200 рублей. Сотрудник банка предложил Андрею два различных плана погашения кредита, описание которых приведено в таблице.

План 1	– каждый январь долг возрастает на 9 % по сравнению с концом предыдущего года; – с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга; – кредит должен быть полностью погашен за три года тремя равными платежами.
План 2	– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца; – со 2-го по 11-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; – 12-го числа каждого месяца со 2-го по 36-й долг должен быть меньше долга на 12-е число предыдущего месяца на одну и ту же сумму; – к 12-му числу 36-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

На сколько рублей меньше окажется общая сумма выплат Андрея банку по более выгодному плану погашения кредита?

- 17** На медиане AD треугольника ABC отметили точку E . Точка F — середина отрезка BE , G — точка пересечения отрезков AD и CF . Отношение площади треугольника EFG к площади треугольника ABC равно $1 : 8$.
 а) Докажите, что $AE : ED = 1 : 3$.
 б) Найдите площадь четырёхугольника $BDGF$, если $BC = 3\sqrt{29}$, $AB = 7$, $AC = 10$.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{x}(x^2 + x + 2) - yx^3 = yx(x + 2), \\ y^2 + (a - 8)y + (a + 3)(5 - 2a) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

19 Для натурального числа n рассмотрим выражение

$$P(n) = n + s(n) + 2s(s(n)),$$

где $s(m)$ — сумма цифр натурального числа m (например, $P(999) = 999 + 27 + 18 = 1044$).

а) Может ли $P(n)$ равняться 208 при некотором n ?

б) Может ли $P(n)$ равняться 190 при некотором n ?

в) Найдите все натуральные n , для которых $P(n) = 2022$.



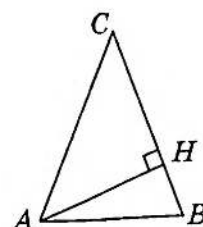
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ВАРИАНТ 12

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 В треугольнике ABC известно, что $AC = BC$, $AB = 15$,
 $\cos BAC = \frac{\sqrt{19}}{10}$. Найдите высоту AH .



Ответ: _____.

- 2 Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны соответственно 9 и 60, а их скалярное произведение равно 429. Найдите длину вектора $\vec{c}$, если $\vec{c} = 2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

Ответ: _____.

- 3 Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объём увеличится на 169. Найдите ребро куба.

Ответ: _____.

- 4 В группе девять человек, среди них — Евгений и Марина. Группу случайным образом делят на 3 одинаковые по численности подгруппы. Найдите вероятность того, что Евгений и Марина окажутся в одной подгруппе.

Ответ: _____.

- 5 Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 35 % яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 60 % яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 55 % яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Ответ: _____.

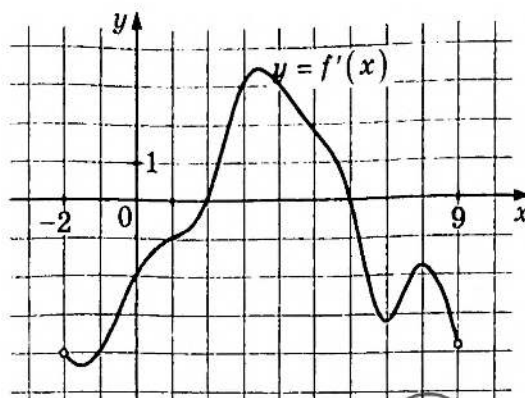
- 6 Найдите корень уравнения $7^{5-2x} = 0,49 \cdot 10^{5-2x}$.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $\sqrt{12} \cos^2 \frac{5\pi}{12} - \sqrt{3}$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 9)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -3x + 20$ или совпадает с ней.



Ответ: _____.

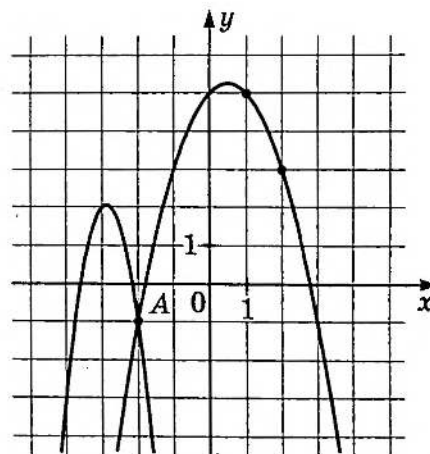
- 9 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 0,4 + 14t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 3 метров?

Ответ: _____.

- 10 Васе надо решить 245 задач. Ежедневно он решает на одно и то же количество задач больше по сравнению с предыдущим днём. Известно, что за первый день Вася решил 11 задач. Определите, сколько задач решил Вася в последний день, если со всеми задачами он справился за 7 дней.

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображены графики функций $f(x) = -4x^2 - 23x - 31$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 5x + \ln x - 3$ на отрезке $\left[\frac{5}{6}; \frac{7}{6}\right]$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $4 \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} = \cos x (\sqrt{3} - 4 \sin x)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $MAVC$ двугранный угол при основании равен $\arctg 3$. Через точку K ребра MC и вершины A и B проходит плоскость α так, что площадь сечения пирамиды плоскостью α относится к площади основания как $3 : \sqrt{13}$.

а) Докажите, что прямая MC перпендикулярна плоскости α .

б) Найдите объём пирамиды $MAVK$, если объём пирамиды $MAVC$ равен $52\sqrt{5}$.

15 Решите неравенство $\frac{4x^3 - 8x^2 - 3x + 9}{9^{x+1} - 82 \cdot 3^x + 9} \geq 0$.

16 Андрей планирует 19 декабря взять в банке кредит на 3 года в размере 2 029 000 рублей. Сотрудник банка предложил Андрею два различных плана погашения кредита, описание которых приведено в таблице.

План 1	– каждый январь долг возрастает на 8 % по сравнению с концом предыдущего года; – с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга; – кредит должен быть полностью погашен за три года тремя равными платежами.
План 2	– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 0,8 % по сравнению с концом предыдущего месяца; – со 2-го по 18-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; – 19-го числа каждого месяца со 2-го по 36-й долг должен быть меньше долга на 19-е число предыдущего месяца на одну и ту же сумму; – к 19-му числу 36-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

На сколько рублей меньше окажется общая сумма выплат Андрея банку по более выгодному плану погашения кредита?

17 На медиане AD треугольника ABC отметили точку E . Точка F — середина отрезка BE , G — точка пересечения отрезков AD и CF . Отношение площади треугольника EFG к площади треугольника ABC равно $1 : 9$.

а) Докажите, что $AE : AD = 1 : 3$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $BDGF$, если $BC = 9$, $AB = 13$, $AC = 4\sqrt{10}$.

- 18** Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x}(x^2 + x + 1) - yx^3 = yx(x + 1), \\ y^2 + (2a - 6)y + (a + 3)(3 - 3a) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

- 19** Для натурального числа n рассмотрим выражение

$$P(n) = n + s(n) + 2s(s(n)),$$

где $s(m)$ — сумма цифр натурального числа m (например, $P(999) = 999 + 27 + 18 = 1044$).

- а) Может ли $P(n)$ равняться 181 при некотором n ?
- б) Может ли $P(n)$ равняться 192 при некотором n ?
- в) Найдите все натуральные n , для которых $P(n) = 2020$.



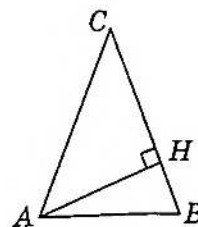
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ВАРИАНТ 13

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 В треугольнике ABC известно, что $AC = BC$, $AB = 10$, $\cos BAC = \frac{7}{25}$. Найдите высоту AH .



Ответ: _____.

- 2 Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны соответственно 11 и 7, а их скалярное произведение равно 53. Найдите длину вектора $\vec{c}$, если $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$.

Ответ: _____.

- 3 Если каждое ребро куба увеличить на 3, то его объём увеличится на 63. Найдите ребро куба.

Ответ: _____.

- 4 В группе 16 человек, среди них — Анна и Татьяна. Группу случайным образом делят на 4 одинаковые по численности подгруппы. Найдите вероятность того, что Анна и Татьяна окажутся в одной подгруппе.

Ответ: _____.

- 5 Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 15 % яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 65 % яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 45 % яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Ответ: _____.

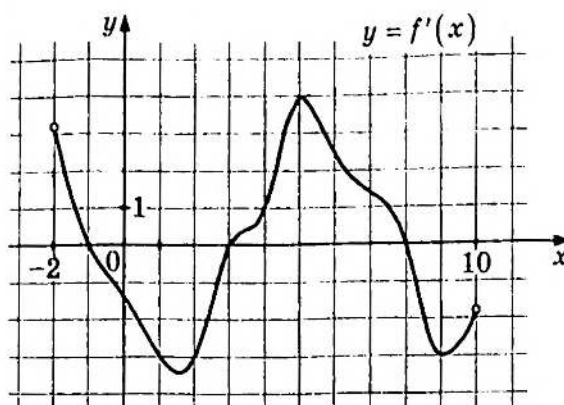
- 6 Найдите корень уравнения $5^{1-2x} = 2,5 \cdot 2^{1-2x}$.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $\sqrt{2} - \sqrt{8} \sin^2 \frac{5\pi}{8}$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 10)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = x - 17$ или совпадает с ней.



Ответ: _____.

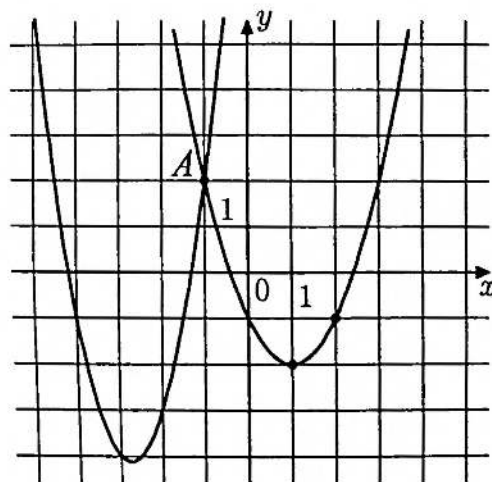
- 9 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1 + 12t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 5 метров?

Ответ: _____.

- 10 Васе надо решить 98 задач. Ежедневно он решает на одно и то же количество задач больше по сравнению с предыдущим днём. Известно, что за первый день Вася решил 8 задач. Определите, сколько задач решил Вася в последний день, если со всеми задачами он справился за 7 дней.

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображены графики функций $f(x) = 2x^2 + 11x + 11$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 6x + 2\ln x + 7$ на отрезке $\left[\frac{6}{7}; \frac{8}{7}\right]$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13** а) Решите уравнение $4 \sin x \cos^2 x - 1 = \cos x(4 \sin x - 1)$.
 б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.
- 14** В правильной треугольной пирамиде $MAVC$ двугранный угол при основании равен $\arccos \frac{2\sqrt{13}}{13}$. Через точку K ребра MC и вершины A и B проходит плоскость α так, что площадь сечения пирамиды плоскостью α относится к площади основания как 3 : 5.
 а) Докажите, что прямая MC перпендикулярна плоскости α .
 б) Найдите объём пирамиды $MAVK$, если объём пирамиды $MAVC$ равен $95\sqrt{11}$.
- 15** Решите неравенство $\frac{4x^3 - 27x + 27}{5^{2x} - 31 \cdot 5^x + 30} \geq 0$.
- 16** Андрей планирует 9 декабря взять в банке кредит на 3 года в размере 2 067 600 рублей. Сотрудник банка предложил Андрею два различных плана погашения кредита, описание которых приведено в таблице.

План 1	– каждый январь долг возрастает на 7,5 % по сравнению с концом предыдущего года; – с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга; – кредит должен быть полностью погашен за три года тремя равными платежами.
План 2	– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца; – со 2-го по 8-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; – 9-го числа каждого месяца со 2-го по 36-й долг должен быть меньше долга на 9-е число предыдущего месяца на одну и ту же сумму; – к 9-му числу 36-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

На сколько рублей меньше окажется общая сумма выплат Андрея банку по более выгодному плану погашения кредита?

- 17** На медиане AD треугольника ABC отметили точку E . Точка F — середина отрезка BE , G — точка пересечения отрезков AD и CF . Отношение площади треугольника EFG к площади треугольника ABC равно 1 : 10.
 а) Докажите, что $ED : AD = 3 : 5$.
 б) Найдите площадь четырёхугольника $BDGF$, если $BC = 10$, $AC = 4\sqrt{13}$, $AB = 6$.

18 Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x}(x^2 - x + 1) - yx^3 = yx(1 - x), \\ y^2 + (a - 8)y + (a + 1)(7 - 2a) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

19 Для натурального числа n рассмотрим выражение

$$P(n) = n + s(n) + 2s(s(n)),$$

где $s(m)$ — сумма цифр натурального числа m (например, $P(999) = 999 + 27 + 18 = 1044$).

а) Может ли $P(n)$ равняться 217 при некотором n ?

б) Может ли $P(n)$ равняться 162 при некотором n ?

в) Найдите все натуральные n , для которых $P(n) = 2017$.



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ВАРИАНТ 14

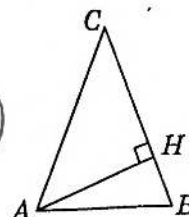
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 В треугольнике ABC известно, что $AC = BC$, $AB = 12$,

$$\cos BAC = \frac{\sqrt{19}}{10}. \text{ Найдите высоту } AH.$$

Ответ: _____.



- 2 Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны соответственно 5 и 8, а их скалярное произведение равно 12. Найдите длину вектора $\vec{c}$, если $\vec{c} = 3\vec{a} + \vec{b}$.

Ответ: _____.

- 3 Диагональ куба равна $\sqrt{147}$. Найдите его объём.

Ответ: _____.

- 4 В группе 21 человек, среди них Иван и Елена. Группу случайным образом делят на 3 одинаковые по численности подгруппы. Найдите вероятность того, что Иван и Елена окажутся в одной подгруппе.

Ответ: _____.

- 5 Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 75 % яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 25 % яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 70 % яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Ответ: _____.

- 6 Найдите корень уравнения $5^{x+3} = 6,25 \cdot 2^{x+3}$.

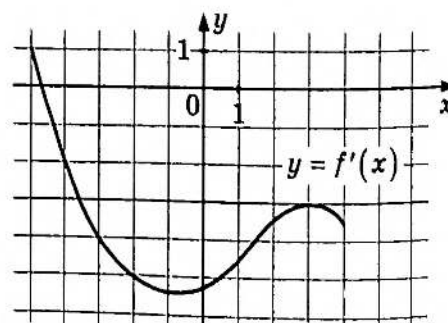
Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $\sqrt{12} - \sqrt{48} \sin^2 \frac{17\pi}{12}$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 6 - 2x$ или совпадает с ней.

Ответ: _____.



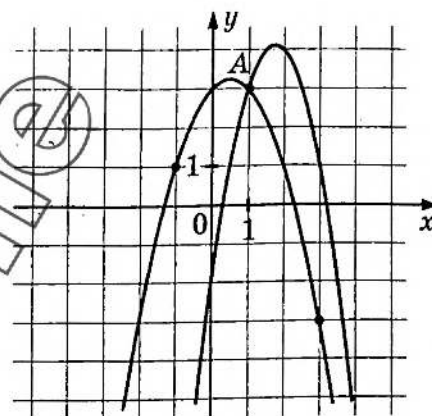
- 9 После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,8 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,4 с? Ответ дайте в метрах.

Ответ: _____.

- 10 Мише надо решить 168 задач. Ежедневно он решает на одно и то же количество задач больше по сравнению с предыдущим днём. Известно, что за первый день Миша решил 14 задач. Определите, сколько задач решил Миша в последний день, если со всеми задачами он справился за 8 дней.

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображены графики функций $f(x) = -2x^2 + 7x - 2$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .



Ответ: _____.

- 12 Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 3,5x^2 + 2x + 16$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $4\sin x \cos^2 x - 1 = \cos x(1 - 4\sin x)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

- 14 В правильной треугольной пирамиде $МABC$ двугранный угол при основании равен $\arccos \frac{3\sqrt{58}}{58}$. Через точку K ребра MC и вершины A и B проходит плоскость α так, что

площадь сечения пирамиды плоскостью α относится к площади основания как $7 : \sqrt{85}$.

а) Докажите, что прямая MC перпендикулярна плоскости α .

б) Найдите объём пирамиды $MAVK$, если объём пирамиды $MAVC$ равен $170\sqrt{2}$.

15 Решите неравенство $\frac{16x^3 - 8x^2 - 7x - 1}{2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x + 4} \leq 0$.

- 16 Андрей планирует 22 декабря взять в банке кредит на 3 года в размере 2 712 500 руб. Сотрудник банка предложил Андрею два различных плана погашения кредита, описание которых приведено в таблице.

План 1	– каждый январь долг возрастает на 12,5 % по сравнению с концом предыдущего года; – с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга; – кредит должен быть полностью погашен за три года тремя равными платежами.
План 2	– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца; – со 2-го по 21-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; – 22-го числа каждого месяца со 2-го по 36-й долг должен быть меньше долга на 22-е число предыдущего месяца на одну и ту же сумму; – к 22-му числу 36-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

На сколько рублей меньше окажется общая сумма выплат Андрея банку по более выгодному плану погашения кредита?

- 17 На медиане AD треугольника ABC отметили точку E . Точка F — середина отрезка BE , G — точка пересечения отрезков AD и CF . Отношение площади треугольника EFG к площади треугольника ABC равно $2 : 15$.

а) Докажите, что $AE : ED = 1 : 4$.

б) Найдите площадь четырехугольника $BDGF$, если $AC = \sqrt{85}$, $BC = 10$, $AB = 15$.

- 18 Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x}(x^2 - x + 2) - yx^3 = yx(2 - x), \\ y^2 + (2a - 7)y + (a + 2)(5 - 3a) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

- 19 Для натурального числа n рассмотрим выражение

$$P(n) = n + s(n) + 2s(s(n)),$$

где $s(m)$ — сумма цифр натурального числа m (например, $P(999) = 999 + 27 + 18 = 1044$).

а) Может ли $P(n)$ равняться 160 при некотором n ?

б) Может ли $P(n)$ равняться 156 при некотором n ?

в) Найдите все натуральные n , для которых $P(n) = 2023$.



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ВАРИАНТ 15

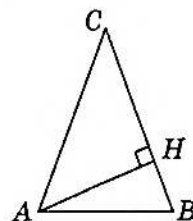
Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 В треугольнике ABC известно, что $AC = BC$, $AB = 4$,

$$\cos BAC = \frac{\sqrt{51}}{10}. \text{ Найдите высоту } AH.$$

Ответ: _____.



- 2 Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны соответственно 16 и 6, а их скалярное произведение равно 24. Найдите длину вектора $\vec{c}$, если $\vec{c} = \frac{1}{4}\vec{a} + \vec{b}$.

Ответ: _____.

- 3 Диагональ куба равна $\sqrt{48}$. Найдите его объём.

Ответ: _____.

- 4 В группе 21 человек, среди них — Юрий и Ирина. Группу случайным образом делят на 7 одинаковых по численности подгрупп. Найдите вероятность того, что Юрий и Ирина окажутся в одной подгруппе.

Ответ: _____.

- 5 Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 35 % яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 75 % яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 55 % яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Ответ: _____.

- 6 Найдите корень уравнения $3^{2x+1} = 0,09 \cdot 10^{2x+1}$.

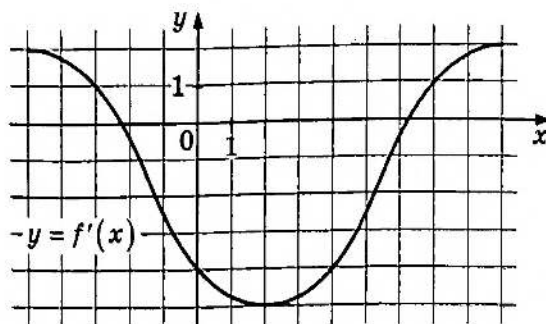
Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $\sqrt{8} \cos^2 \frac{\pi}{8} - \sqrt{2}$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 8 - 5x$ или совпадает с ней.

Ответ: _____.



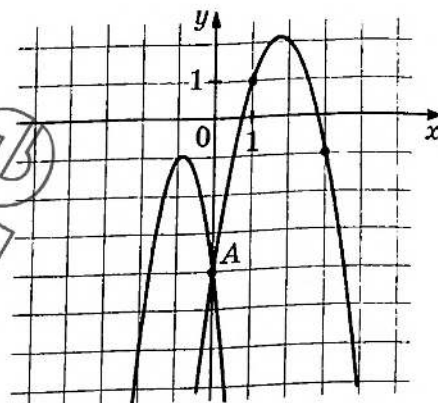
- 9 После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,9 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,3 с? Ответ дайте в метрах.

Ответ: _____.

- 10 Артуру надо решить 152 задачи. Ежедневно он решает на одно и то же количество задач больше по сравнению с предыдущим днём. Известно, что за первый день Артур решил 5 задач. Определите, сколько задач решил Артур в последний день, если со всеми задачами он справился за 8 дней.

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображены графики функций $f(x) = -4x^2 - 7x - 4$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .



Ответ: _____.

- 12 Найдите точку минимума функции $y = x^3 + 9,5x^2 + 30x + 22$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ: Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $4 \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} = 2 \cos x (1 - \sqrt{3} \sin x)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

- 14 В правильной треугольной пирамиде $МABC$ двугранный угол при основании равен $\arcsin \frac{5\sqrt{29}}{29}$. Через точку K ребра MC и вершины A и B проходит плоскость α так, что

площадь сечения пирамиды плоскостью α относится к площади основания как $5 : \sqrt{41}$.

а) Докажите, что прямая MC перпендикулярна плоскости α .

б) Найдите объём пирамиды $MAVK$, если объём пирамиды $MAVC$ равен $123\sqrt{17}$.

15 Решите неравенство $\frac{2x^3 - 11x^2 + 12x + 9}{3^{2x+1} - 7 \cdot 3^x + 2} \leq 0$.

- 16 Андрей планирует 15 декабря взять в банке кредит на 3 года в размере 2 584 500 рублей. Сотрудник банка предложил Андрею два различных плана погашения кредита, описание которых приведено в таблице.

План 1	– каждый январь долг возрастает на 7,5 % по сравнению с концом предыдущего года; – с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга; – кредит должен быть полностью погашен за три года тремя равными платежами.
План 2	– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца; – со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; – 15-го числа каждого месяца со 2-го по 36-й долг должен быть меньше долга на 15-е число предыдущего месяца на одну и ту же сумму; – к 15-му числу 36-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

На сколько рублей меньше окажется общая сумма выплат Андрея банку по более выгодному плану погашения кредита?

- 17 На медиане AD треугольника ABC отметили точку E . Точка F — середина отрезка BE , G — точка пересечения отрезков AD и CF . Отношение площади треугольника EFG к площади треугольника ABC равно $5 : 36$.
- а) Докажите, что $ED : AD = 5 : 6$.
- б) Найдите площадь четырехугольника $BDGF$, если $BC = 8$, $AB = 10$, $AC = 2\sqrt{73}$.

- 18 Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x}(x^2 - 2x + 3) - yx^3 = yx(3 - 2x), \\ y^2 + (a - 7)y + (a + 1)(6 - 2a) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

- 19 Для натурального числа n рассмотрим выражение

$$P(n) = n + s(n) + 2s(s(n)),$$

где $s(m)$ — сумма цифр натурального числа m (например, $P(999) = 999 + 27 + 18 = 1044$).

- а) Может ли $P(n)$ равняться 221 при некотором n ?
- б) Может ли $P(n)$ равняться 197 при некотором n ?
- в) Найдите все натуральные n , для которых $P(n) = 2024$.



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

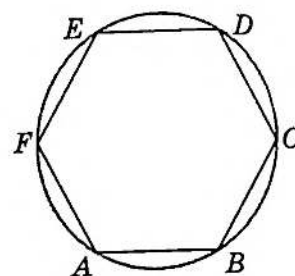
ВАРИАНТ 16

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Периметр правильного шестиугольника равен 24. Найдите диаметр описанной окружности.

Ответ: _____.

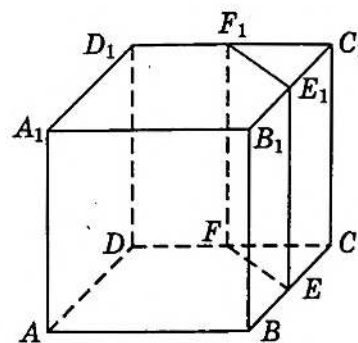


- 2 Даны векторы $\vec{m}(6; -2)$, $\vec{n}(-1; 4)$ и $\vec{k}(x; -2)$. Найдите x , если $(\vec{m} + \vec{n}) \cdot \vec{k} = 0$.

Ответ: _____.

- 3 Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 47. Найдите объём куба.

Ответ: _____.



- 4 Клиент получает в банке кредитную карту. Три последние цифры номера карты случайные. Какова вероятность того, что эти последние три цифры идут подряд в порядке убывания, например 876 или 432?

Ответ: _____.

- 5 Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет чисел больших, чем 2, а числа 1 и 2 встречаются по три раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 1 и 2 очка. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

Ответ: _____.

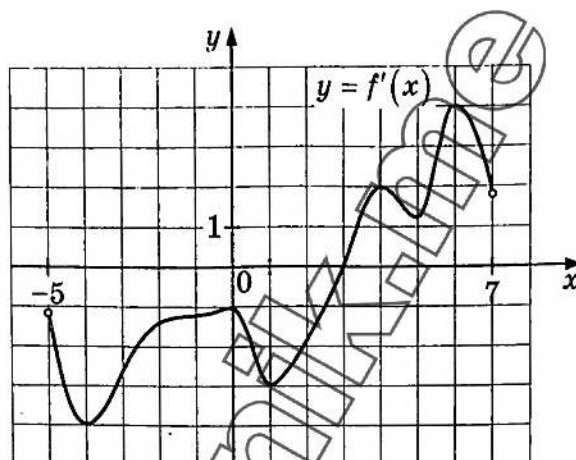
- 6 Решите уравнение $\frac{x-1}{6x+11} = \frac{x-1}{5x+3}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Ответ: _____.

- 7 Найдите $p(x) + p(-20-x)$, если $p(x) = \frac{x(-20-x)}{x+10}$ при $x \neq -10$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 7)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку $[-3; 5]$.



Ответ: _____.

- 9 Скорость движения автомобиля v (км/ч) и угловая скорость вращения вала двигателя $\omega_{\text{двиг.}}$ (об/мин) связаны соотношением

$$v = \frac{0,0006 \cdot \pi d \omega_{\text{двиг.}}}{kb},$$

где d — диаметр колеса (см), k — передаточное число дифференциала автомобиля, а b — передаточное число коробки передач при выбранной передаче. В таблице указаны передаточные числа для автомобиля «Лада-Калина».

	Коробка передач						Дифференциал
	1-я пер.	2-я пер.	3-я пер.	4-я пер.	5-я пер.	Задняя	
Передаточное число	3,636	1,950	1,357	0,941	0,784	3,500	3,706

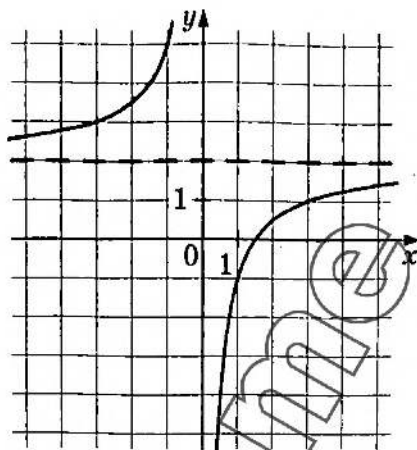
У автомобиля «Лада-Калина» диаметр колеса равен 56 см. Водитель двигается на 1-й передаче с постоянной скоростью. Прибор (тахометр) показывает, что число оборотов двигателя равно 4000 об/мин. Считайте, что $\pi = 3,14$. Найдите скорость автомобиля в км/ч. Результат округлите до целого значения.

Ответ: _____.

- 10] Первая труба пропускает на 2 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 588 литров она заполняет на 7 минут быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объёмом 728 литров?

Ответ: _____.

- 11] На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите $f(7,5)$.



Ответ: _____.

- 12] Найдите наименьшее значение функции $y = 13x - 10\sin x + 1$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13] а) Решите уравнение $(4\sin^2 x - 1)\sqrt{x^2 - 64\pi^2} = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[25; 30]$.
- 14] В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Точка M — середина ребра B_1C_1 , точка N лежит на ребре AC , причём $AN : NC = 3 : 1$. Катет AC вдвое больше бокового ребра AA_1 призмы.
 а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна прямой CA_1 .
 б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью основания $A_1B_1C_1$, если $\sin \angle CBA = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

15) Решите неравенство $2x \geq \log_2 \left(\frac{35}{3} \cdot 6^{x-1} - 2 \cdot 9^{x-\frac{1}{2}} \right)$.

16) Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20 % по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 9 млн руб.

17) Дан остроугольный треугольник ABC . Биссектриса внутреннего угла при вершине B пересекает биссектрису внешнего угла при вершине C в точке M , а биссектриса внутреннего угла при вершине C пересекает биссектрису внешнего угла при вершине B в точке N .

а) Докажите, что $2\angle BMN = \angle ACB$.

б) Найдите BM , если $AB = AC = 5$, $BC = 6$.

18) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 10x - 5 - 2ax + 6a - a^2 = 0$$

имеет не менее трёх корней.

19) Дана бесконечная арифметическая прогрессия, первый член которой равен 2014, а разность равна 13. Каждый член прогрессии заменили суммой его цифр. С полученной последовательностью поступили так же и действовали так до тех пор, пока не получилась последовательность однозначных чисел.

а) Найдите тысячное число получившейся последовательности.

б) Найдите сумму первой тысячи чисел получившейся последовательности.

в) Чему может равняться наибольшая сумма 1010 чисел получившейся последовательности, идущих подряд?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

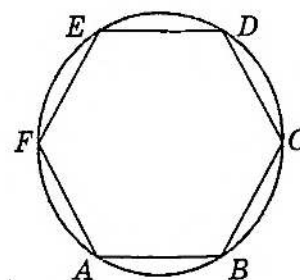
ВАРИАНТ 17

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Периметр правильного шестиугольника равен 222. Найдите диаметр описанной окружности.

Ответ: _____.

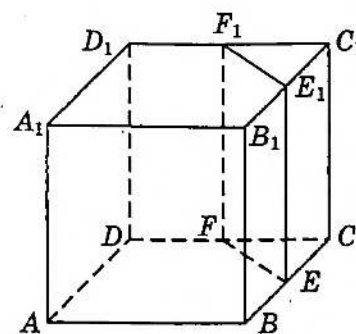


- 2 Даны векторы $\vec{m}(-4; -3)$, $\vec{n}(-2; 2)$ и $\vec{k}(x; 3)$. Найдите x , если $(\vec{m} + \vec{n}) \cdot \vec{k} = 0$.

Ответ: _____.

- 3 Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 33. Найдите объём куба.

Ответ: _____.



- 4 Клиент получает в банке кредитную карту. Четыре последние цифры номера карты случайные. Какова вероятность того, что эти последние четыре цифры состоят из двух повторяющихся групп по 2 различные цифры, например 0404 или 5252?

Ответ: _____.

- 5 Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет чётных чисел, а нечётные числа 1, 3 и 5 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 3 и 5 очков. Какова вероятность того, что бросали первый кубик?

Ответ: _____.

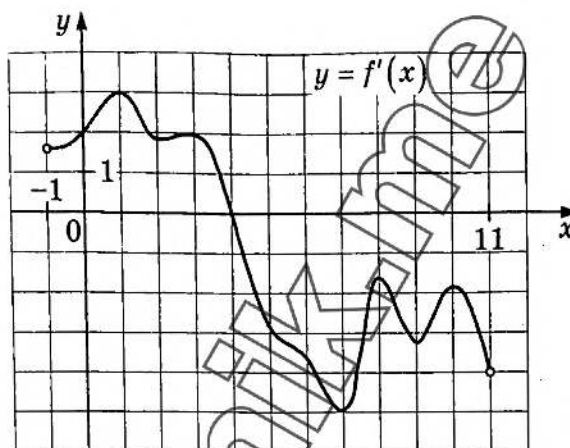
- 6 Решите уравнение $\frac{x+4}{5x+9} = \frac{x+4}{4x-5}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $2(p(6x) - 6p(x+5))$, если $p(x) = x + 2$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-1; 11)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку $[2; 8]$.



Ответ: _____.

- 9 Скорость движения автомобиля v (км/ч) и угловая скорость вращения вала двигателя $\omega_{\text{двиг.}}$ (об/мин) связаны соотношением

$$v = \frac{0,0006 \cdot \pi d \omega_{\text{двиг.}}}{kb},$$

где d — диаметр колеса (см), k — передаточное число дифференциала автомобиля, а b — передаточное число коробки передач при выбранной передаче. В таблице указаны передаточные числа для автомобиля «Лада-Калина».

	Коробка передач						Дифференциал
	1-я пер.	2-я пер.	3-я пер.	4-я пер.	5-я пер.	Задняя	
Передаточное число	3,636	1,950	1,357	0,941	0,784	3,500	3,706

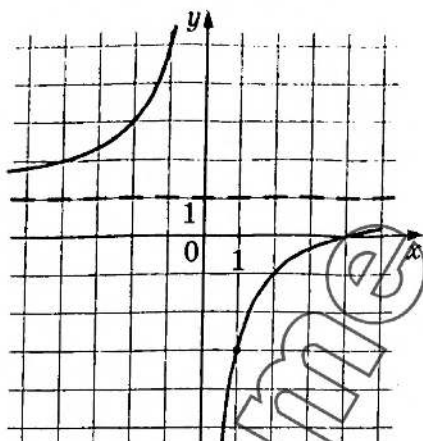
У автомобиля «Лада-Калина» диаметр колеса равен 44 см. Водитель двигается на 3-й передаче с постоянной скоростью. Прибор (тахометр) показывает, что число оборотов двигателя равно 3500 об/мин. Считайте, что $\pi = 3,14$. Найдите скорость автомобиля в км/ч. Результат округлите до целого значения.

Ответ: _____.

- 10 Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 374 литра она заполняет на 5 минут быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объёмом 462 литра?

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите $f(25)$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции $y = 7x - 6 \sin x + 12$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $(4 \sin^2 x - 1) \sqrt{64\pi^2 - x^2} = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-30; -20]$.
- 14 В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Точка M — середина ребра B_1C_1 , точка N лежит на ребре AC , причём $AN : NC = 8 : 1$. Катет AC вдвое больше бокового ребра AA_1 призмы.
а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна прямой CA_1 .
б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью основания $A_1B_1C_1$, если $\sin \angle CBA = \frac{3}{5}$.

15) Решите неравенство $2x \geq \log_3 \left(\frac{35}{2} \cdot 6^{x-1} - 3 \cdot 4^{x-\frac{1}{2}} \right)$.

- 16) Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20 % по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 10 млн руб.

- 17) Дан остроугольный треугольник ABC . Биссектриса внутреннего угла при вершине B пересекает биссектрису внешнего угла при вершине C в точке M , а биссектриса внутреннего угла при вершине C пересекает биссектрису внешнего угла при вершине B в точке N .
- Докажите, что $2\angle CNM = \angle ABC$.
 - Найдите CN , если $AB = AC = 13$, $BC = 10$.

- 18) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4ax + 6a - a^2 = 0$$

имеет не менее трёх корней.

- 19) В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше, чем 50, а вместе солдат меньше, чем 120. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 7, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.
- Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.
 - Можно ли построить роту указанным способом по 11 солдат в одном ряду?
 - Сколько в роте может быть солдат?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

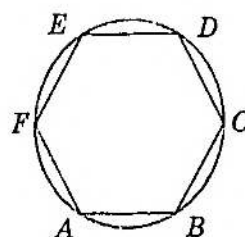
ВАРИАНТ 18

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Периметр правильного шестиугольника равен 150. Найдите диаметр описанной окружности.

Ответ: _____.

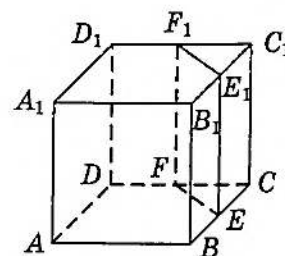


- 2 Даны векторы $\vec{m}(-7; 3)$, $\vec{n}(-3; 5)$ и $\vec{k}(-2; y)$. Найдите y , если $(\vec{m} - \vec{n}) \cdot \vec{k} = 0$.

Ответ: _____.

- 3 Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 19. Найдите объём куба.

Ответ: _____.



- 4 Клиент получает в банке кредитную карту. Четыре последние цифры номера карты случайные. Какова вероятность того, что эти последние четыре цифры идут подряд в порядке возрастания, например 0123 или 4567?

Ответ: _____.

- 5 В ящике 14 красных и 12 синих фломастеров. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счёту?

Ответ: _____.

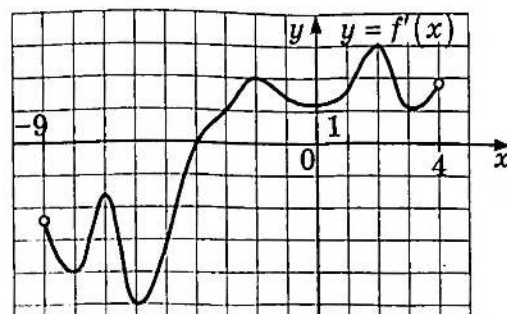
- 6 Решите уравнение $\frac{x-7}{7x+9} = \frac{x-7}{x-3}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $4p(x-4) - p(4x)$, если $p(x) = 2x + 5$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 4)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку $[-5; 3]$.



Ответ: _____.

- 9 Скорость движения автомобиля v (км/ч) и угловая скорость вращения вала двигателя $\omega_{\text{двиг.}}$ (об/мин) связаны соотношением $v = \frac{0,0006 \cdot \pi d \omega_{\text{двиг.}}}{kb}$, где d — диаметр колеса (см), k — передаточное число дифференциала автомобиля, а b — передаточное число коробки передач при выбранной передаче. В таблице указаны передаточные числа для автомобиля «Лада-Калина».

	Коробка передач						Дифференциал
	1-я пер.	2-я пер.	3-я пер.	4-я пер.	5-я пер.	Задняя	
Передаточное число.	3,636	1,950	1,357	0,941	0,784	3,500	3,706

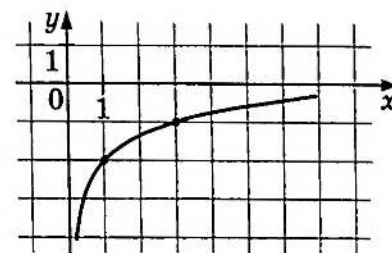
У автомобиля «Лада-Калина» диаметр колеса равен 58 см. Водитель двигается на 2-й передаче с постоянной скоростью. Прибор (тахометр) показывает, что число оборотов двигателя равно 3000 об/мин. Считайте, что $\pi = 3,14$. Найдите скорость автомобиля в км/ч. Результат округлите до целого значения.

Ответ: _____.

- 10 Первая труба пропускает на 3 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 594 литра она заполняет на 5 минут быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объёмом 648 литров?

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите $f\left(\frac{1}{3}\right)$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение $y = 2x - 2 \sin x + 7$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $(4 \sin^2 x - 3) \sqrt{x^2 - 36\pi^2} = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[15; 20]$.
- 14 В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Точка M — середина ребра B_1C_1 , точка N лежит на ребре AC , причём $AN : NC = 15 : 1$. Катет AC в четыре раза больше бокового ребра AA_1 призмы.
а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна прямой CA_1 .
б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью основания $A_1B_1C_1$, если $\cos \angle CBA = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
- 15 Решите неравенство $2x \geq \log_5 (29 \cdot 10^{x-1} - 4^x)$.
- 16 Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на четыре года. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20 % по сравнению с началом года. В конце 1-го и 2-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 3-го и 4-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 10 млн руб.
- 17 Дан остроугольный треугольник ABC . Биссектриса внутреннего угла при вершине B пересекает биссектрису внешнего угла при вершине C в точке M , а биссектриса внутреннего угла при вершине C пересекает биссектрису внешнего угла при вершине B в точке N .
а) Докажите, что $\angle CNM = \angle MBC$.
б) Найдите CN , если $AB = AC = 15$, $BC = 18$.
- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $x^4 + 4x^3 + 4ax - 16x - 16 + 8a - a^2 = 0$ имеет не менее трёх корней.
- 19 На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 363. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).
а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.
б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?
в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.



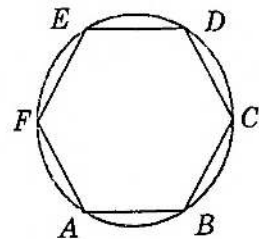
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ВАРИАНТ 19

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Периметр правильного шестиугольника равен 18. Найдите диаметр описанной окружности.

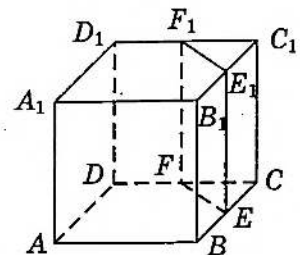


Ответ: _____.

- 2 Даны векторы $\vec{m}(-2; 4)$, $\vec{n}(-7; 5)$ и $\vec{k}(x; -3)$. Найдите x , если $\vec{k} \cdot (\vec{n} - \vec{m}) = 0$.

Ответ: _____.

- 3 Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 20. Найдите объём куба.



Ответ: _____.

- 4 Сергей получает паспорт. Последние три цифры номера паспорта — случайные. Найдите вероятность того, что последние три цифры — это цифры 1, 2 и 3 в каком-то порядке.

Ответ: _____.

- 5 В ящике 13 красных и 13 синих фломастеров. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счёту?

Ответ: _____.

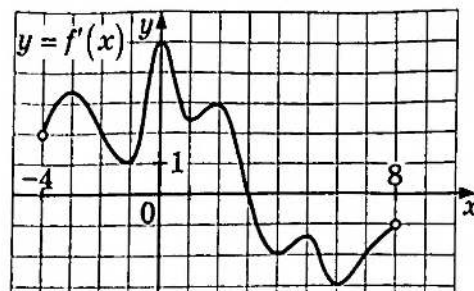
- 6 Решите уравнение $\frac{x+6}{5x-6} = \frac{x+6}{2x-9}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $p(x-5) + p(6-x)$, если $p(x) = 5x - 4$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 8)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку $[0; 6]$.



Ответ: _____.

- 9 Скорость движения автомобиля v (км/ч) и угловая скорость вращения вала двигателя $\omega_{\text{двиг.}}$ (об/мин) связаны соотношением $v = \frac{0,0006 \cdot \pi d \omega_{\text{двиг.}}}{kb}$, где d — диаметр колеса (см), k — передаточное число дифференциала автомобиля, а b — передаточное число коробки передач при выбранной передаче. В таблице указаны передаточные числа для автомобиля «Лада-Калина».

	Коробка передач						Дифференциал
	1-я пер.	2-я пер.	3-я пер.	4-я пер.	5-я пер.	Задняя	
Передаточное число	3,636	1,950	1,357	0,941	0,784	3,500	3,706

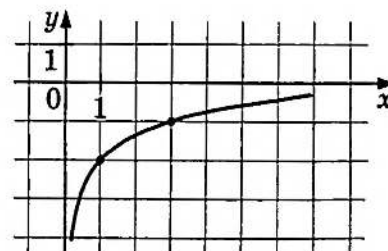
У автомобиля «Лада-Калина» диаметр колеса равен 46 см. Водитель движется на 4-й передаче с постоянной скоростью. Прибор (тахометр) показывает, что число оборотов двигателя равно 2500 об/мин. Считайте, что $\pi = 3,14$. Найдите скорость автомобиля в км/ч. Результат округлите до целого значения.

Ответ: _____.

- 10 Первая труба пропускает на 6 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 468 литров она заполняет на 8 минут быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объёмом 520 литров?

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите $f\left(\frac{1}{9}\right)$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции $y = 13x - 5 \sin x - 14$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $(4 \sin^2 x - 3) \sqrt{36\pi^2 - x^2} = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-20; -15]$.
- 14 В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Точка M — середина ребра B_1C_1 , точка N лежит на ребре AC , причём $AN : NC = 3 : 1$. Катет AC вдвое больше бокового ребра AA_1 призмы.
а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна прямой CA_1 .
б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью основания $A_1B_1C_1$, если $\cos \angle CBA = \frac{3}{5}$.
- 15 Решите неравенство $2x \geq \log_2(29 \cdot 10^{x-1} - 25^x)$.
- 16 Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 25 % по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 8 млн руб.
- 17 Дан остроугольный треугольник ABC . Биссектриса внутреннего угла при вершине B пересекает биссектрису внешнего угла при вершине C в точке M , а биссектриса внутреннего угла при вершине C пересекает биссектрису внешнего угла при вершине B в точке N .
а) Докажите, что $\angle CNM = \angle MBA$.
б) Найдите CN , если $AB = AC = 17$, $BC = 16$.
- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $x^4 - 8x^2 - 9 + 10a - a^2 = 0$ имеет не менее трёх корней.
- 19 На доске было написано 20 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) на доске написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.
а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?
б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?
в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

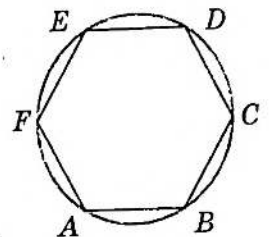
ВАРИАНТ 20

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Периметр правильного шестиугольника равен 132. Найдите диаметр описанной окружности.

Ответ: _____.

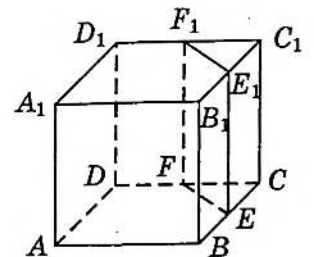


- 2 Даны векторы $\vec{m}(-2; 7)$, $\vec{n}(9; -3)$ и $\vec{k}(4; y)$. Найдите y , если $\vec{k} \cdot (\vec{m} + \vec{n}) = 0$.

Ответ: _____.

- 3 Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 51. Найдите объём куба.

Ответ: _____.



- 4 Алексей получает паспорт. Последние три цифры номера паспорта — случайные. Найдите вероятность того, что последние три цифры — это цифры 2, 4 и 6 в каком-то порядке.

Ответ: _____.

- 5 Телефон передаёт SMS-сообщение. В случае неудачи телефон делает следующую попытку. Вероятность того, что сообщение удастся передать без ошибок в каждой отдельной попытке, равна 0,2. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше двух попыток.

Ответ: _____.

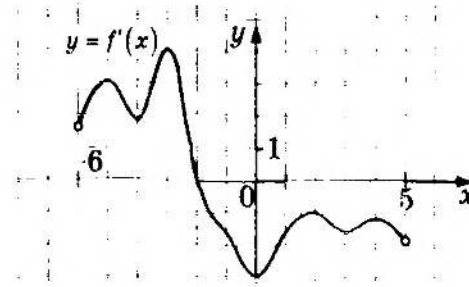
- 6 Решите уравнение $\frac{x+7}{3x+10} = \frac{x+7}{2x-11}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $q(b-8) - q(b+8)$, если $q(b) = 7b$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 5)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку $[-3; 4]$.



Ответ: _____.

- 9 Скорость движения автомобиля v (км/ч) и угловая скорость вращения вала двигателя $\omega_{\text{двиг.}}$ (об/мин) связаны соотношением $v = \frac{0,0006 \cdot \pi d \omega_{\text{двиг.}}}{kb}$, где d — диаметр колеса (см), k — передаточное число дифференциала автомобиля, а b — передаточное число коробки передач при выбранной передаче. В таблице указаны передаточные числа для автомобиля «Лада-Калина».

	Коробка передач						Дифференциал
	1-я пер.	2-я пер.	3-я пер.	4-я пер.	5-я пер.	Задняя	
Передаточное число	3,636	1,950	1,357	0,941	0,784	3,500	3,706

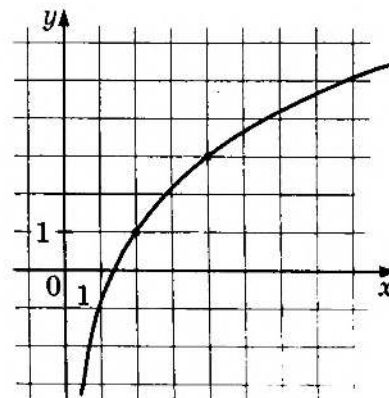
У автомобиля «Лада-Калина» диаметр колеса равен 50 см. Водитель двигается на 5-й передаче с постоянной скоростью. Прибор (тахометр) показывает, что число оборотов двигателя равно 2000 об/мин. Считайте, что $\pi = 3,14$. Найдите скорость автомобиля в км/ч. Результат округлите до целого значения.

Ответ: _____.

- 10 Первая труба пропускает на 2 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 408 литров она заполняет на 7 минут быстрее, чем первая труба заполняет резервуар объёмом 528 литров?

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите $f(0,5)$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции $y = 19x - 10 \sin x + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $(4 \cos^2 x - 1) \sqrt{49\pi^2 - x^2} = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[20; 25]$.
- 14 В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Точка M — середина ребра B_1C_1 , точка N лежит на ребре AC , причём $AN : NC = 8 : 1$. Катет AC вдвое больше бокового ребра AA_1 призмы.
а) Докажите, что прямая MN перпендикулярна прямой CA_1 .
б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью основания $A_1B_1C_1$, если $\sin \angle CBA = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
- 15 Решите неравенство $2x \geq \log_3 \left(\frac{152}{5} \cdot 15^{x-1} - 3 \cdot 25^{x-\frac{1}{2}} \right)$.
- 16 Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 15 % по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика будет меньше 7 млн руб.
- 17 Дан остроугольный треугольник ABC . Биссектриса внутреннего угла при вершине B пересекает биссектрису внешнего угла при вершине C в точке M , а биссектриса внутреннего угла при вершине C пересекает биссектрису внешнего угла при вершине B в точке N .
а) Докажите, что $\angle NMB = \angle NCA$.
б) Найдите CN , если $AB = AC = 10$, $BC = 16$.
- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение
$$x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 20x + 20 - 2ax + 8a - a^2 = 0$$
 имеет не менее трёх корней.
- 19 Три различных натуральных числа являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.
а) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно 2?
б) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{4}{3}$?
в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине число равно 20?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

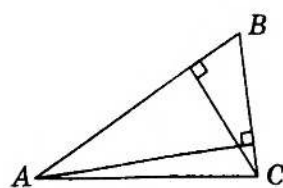
ВАРИАНТ 21

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 В треугольнике со сторонами 9 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой из этих сторон, равна 4. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?

Ответ: _____.



- 2 Найдите косинус угла между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если известно, что $\vec{p}(6; -8)$ и $\vec{q}(0; 2)$.

Ответ: _____.

- 3 Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 30. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Ответ: _____.

- 4 В небольшом магазине работают два продавца — Василий и Сергей. Каждый из них может быть занят с клиентом с вероятностью 0,4. При этом они могут быть заняты одновременно с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайно выбранный момент времени занят только Василий, а Сергей свободен.

Ответ: _____.

- 5 Симметричную монету бросают 11 раз. Во сколько раз вероятность события «выпадет ровно 5 орлов» больше вероятности события «выпадет ровно 4 орла»?

Ответ: _____.

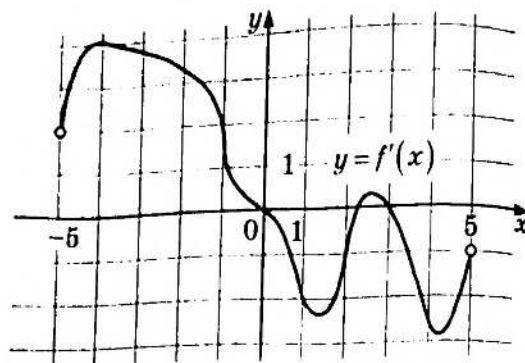
- 6 Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{2x+5}{3}} = 5$.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $\frac{\log_9 125}{\log_9 5}$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-3; 4]$.



Ответ: _____.

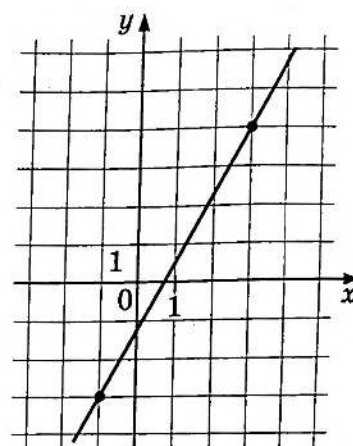
- 9 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 40 мг. Период его полураспада составляет 10 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 5 мг.

Ответ: _____.

- 10 Первый и второй насосы наполняют бассейн за 9 минут, второй и третий — за 12 минут, а первый и третий — за 18 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение x , при котором выполнено $f(x) = -13,5$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите точку минимума функции $y = (1 - 2x)\cos x + 2\sin x + 7$, принадлежащую промежутку $(0; \frac{\pi}{2})$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $\cos 2x + \sqrt{2} \sin x + 1 = 0$.
б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.
- 14 В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 3$ и диагональю $BD = 5$. Все боковые рёбра пирамиды равны 3. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E , а на ребре AS — точка F так, что $SF = BE = 2$.
а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB .
б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q . Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC .
- 15 Решите неравенство $5^{x+3} - 5^{x+2} - 5^x < 6^{\frac{x}{2}+3} - 6^{\frac{x}{2}+2} + 3 \cdot 6^{\frac{x}{2}+1}$.
- 16 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Известно, что за первые 12 месяцев нужно выплатить банку 1370 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?
- 17 На продолжении стороны AC за вершину A треугольника ABC отложен отрезок AD , равный стороне AB . Прямая, проходящая через точку A параллельно BD , пересекает сторону BC в точке M .
а) Докажите, что AM — биссектриса угла BAC .
б) Найдите площадь трапеции $AMBD$, если площадь треугольника ABC равна 180 и известно отношение $AC : AB = 3 : 2$.
- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$ax^2 + 2(a+3)x + (a+4) = 0$$

имеет два корня, расстояние между которыми больше 2.

- 19 а) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого вторая цифра в 14 раз меньше произведения двух других его цифр?
б) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого сумма всех цифр равна 7?
в) Найдите наибольшее кратное 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 9. Ответ обоснуйте.



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

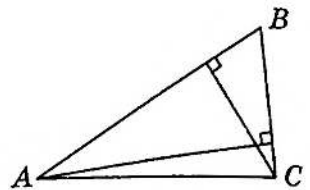
ВАРИАНТ 22

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 В треугольнике со сторонами 15 и 5 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой из этих сторон, равна 1. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?

Ответ: _____.



- 2 Найдите косинус угла между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если известно, что $\vec{p}(-3; 4)$ и $\vec{q}(-9; -12)$.

Ответ: _____.

- 3 Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 10. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Ответ: _____.

- 4 В небольшом магазине работают два продавца — Александр и Алексей. Каждый из них может быть занят с клиентом с вероятностью 0,5. При этом они могут быть заняты одновременно с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайно выбранный момент времени занят только Александр, а Алексей свободен.

Ответ: _____.

- 5 Симметричную монету бросают 12 раз. Во сколько раз вероятность события «выпадет ровно 4 орла» меньше вероятности события «выпадет ровно 5 орлов»?

Ответ: _____.

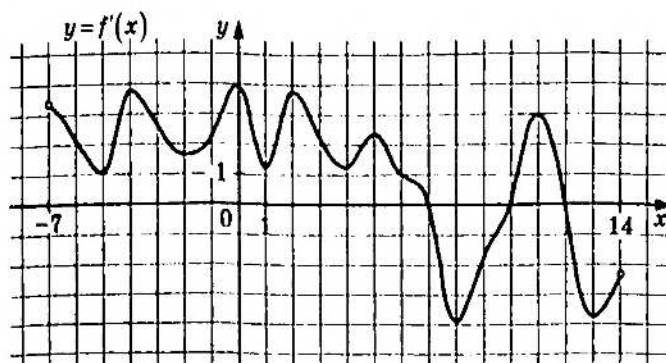
- 6 Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{4x+25}{13}} = 5$.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $\frac{\log_7 81}{\log_7 3}$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 14)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6; 9]$.



Ответ: _____.

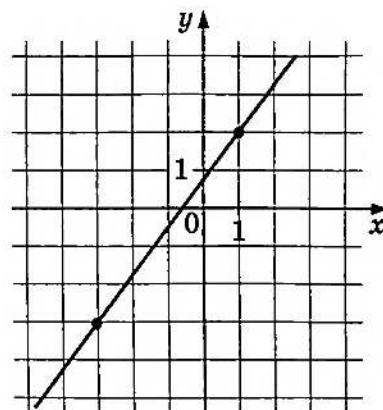
- 9 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 20 мг. Период его полураспада составляет 10 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 5 мг.

Ответ: _____.

- 10 Первый и второй насосы наполняют бассейн за 10 минут, второй и третий — за 15 минут, а первый и третий — за 18 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение x , при котором выполнено $f(x) = 14,5$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите точку минимума функции $y = (3-2x)\cos x + 2\sin x + 4$, принадлежащую промежутку $(0; \frac{\pi}{2})$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $2 - 5\cos x - \cos 2x = 0$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

14 В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 6$ и диагональю $BD = 11$. Все боковые рёбра пирамиды равны 6. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E , а на ребре AS — точка F так, что $SF = BE = 5$.

а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB .

б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q . Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC .

15 Решите неравенство $5^{x+2} + 5^{x+1} - 5^x < 3^{\frac{x}{2}+2} + 3^{\frac{x}{2}} - 3^{\frac{x}{2}-1}$.

16 15 января планируется взять кредит в банке на 20 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Известно, что за первые 10 месяцев нужно выплатить банку 1179 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

17 На продолжении стороны AC за вершину A треугольника ABC отложен отрезок AD , равный стороне AB . Прямая, проходящая через точку A параллельно BD , пересекает сторону BC в точке M .

а) Докажите, что AM — биссектриса угла BAC .

б) Найдите площадь трапеции $AMBD$, если площадь треугольника ABC равна 144 и известно отношение $AC : AB = 3 : 1$.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$ax^2 + 2(a+2)x + (a+5) = 0$$

имеет два корня, расстояние между которыми больше 1.

19 а) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого вторая цифра равна произведению двух других его цифр?

б) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого сумма всех цифр равна 5?

в) Найдите наименьшее кратное 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 и 9. Ответ обоснуйте.



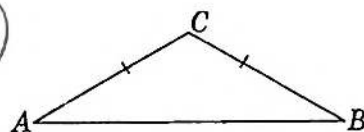
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ВАРИАНТ 23

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 В треугольнике ABC угол C равен 118° , стороны AC и BC равны. Найдите угол A . Ответ дайте в градусах.

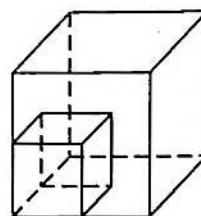


Ответ: _____.

- 2 Найдите косинус угла между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если известно, что $\vec{p}(-5; -12)$ и $\vec{q}(56; 33)$.

Ответ: _____.

- 3 Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если все его рёбра увеличить в 4 раза?



Ответ: _____.

- 4 Девять детей встают в хоровод в случайном порядке. Среди них Серёжа и его сестра Маша. Какова вероятность того, что Серёжа и Маша окажутся рядом?

Ответ: _____.

- 5 Симметричную монету бросают 8 раз. Во сколько раз вероятность события «выпало ровно 4 орла» больше вероятности события «выпадет ровно 3 орла»?

Ответ: _____.

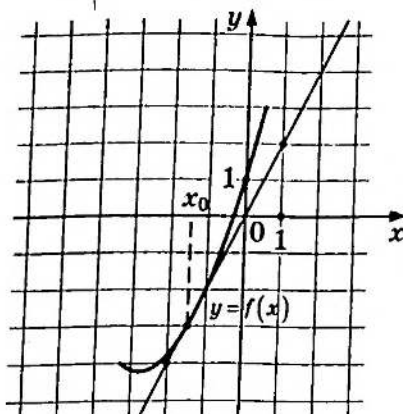
- 6 Найдите корень уравнения $\log_2(15 + x) = \log_2 3$.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $2\sqrt{3}\operatorname{tg}(-300^\circ)$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

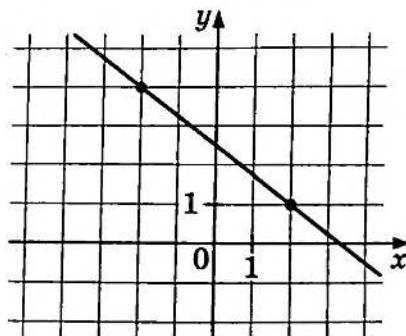
- 9 Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб. за ед.) задаётся формулой $q = 70 - 5p$. Выручка предприятия r (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 240 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб. за ед.

Ответ: _____.

- 10 Семь одинаковых рубашек дешевле куртки на 2%. На сколько процентов десять таких же рубашек дороже куртки?

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение x , при котором выполнено $f(x) = -8$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите точку минимума функции $y = (10 - x)e^{10-x}$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{18}{(x-2)^2} = 7\left(\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2}\right) + 10$.
- б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2; 2]$.
- 14 В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 5, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{5}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $CK = 2$, а $C_1 L = 1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .
- а) Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .
- б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка A_1 , а основание — сечение данной призмы плоскостью γ .
- 15 Решите неравенство $\log_{\sqrt[4]{25}} \left(\log_{\frac{1}{2}} (x+2) \right) \geq 2$.
- 16 31 декабря 2016 года Василий взял в банке 5 460 000 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20 %), затем Василий переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x , чтобы Василий выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?
- 17 В трапеции $ABCD$ основания AD и BC . Диагональ AC разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и AB .
- а) Докажите, что луч DB — биссектриса угла ADC .
- б) Найдите AB , если известно, что $BD = 8$ и $AC = 5$.
- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых система
$$\begin{cases} x+y+2z=4x^2+y^2, \\ 2x+y+3z=a \end{cases}$$
 имеет единственное решение.
- 19 На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 3.
- а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 8, если сначала по одному разу были написаны числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и 11?
- б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 54, если сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 200 до 299 включительно?
- в) Известно, что на доске осталось ровно два числа, а сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 200 до 299 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

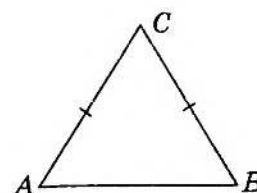
ВАРИАНТ 24

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 В треугольнике ABC угол C равен 66° , стороны AC и BC равны. Найдите угол A . Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.

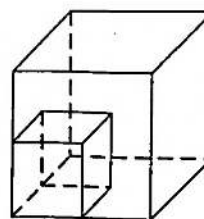


- 2 Найдите косинус угла между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если известно, что $\vec{p}(0; -4)$ и $\vec{q}(12; 9)$.

Ответ: _____.

- 3 Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если все его рёбра увеличить в 7 раз?

Ответ: _____.



- 4 Одиннадцать детей встают в хоровод в случайном порядке. Среди них Антон и его сестра Маша. Какова вероятность того, что Антон и Маша окажутся рядом?

Ответ: _____.

- 5 Симметричную монету бросают 9 раз. Во сколько раз вероятность события «выпадет ровно 4 орла» больше вероятности события «выпадет ровно 3 орла»?

Ответ: _____.

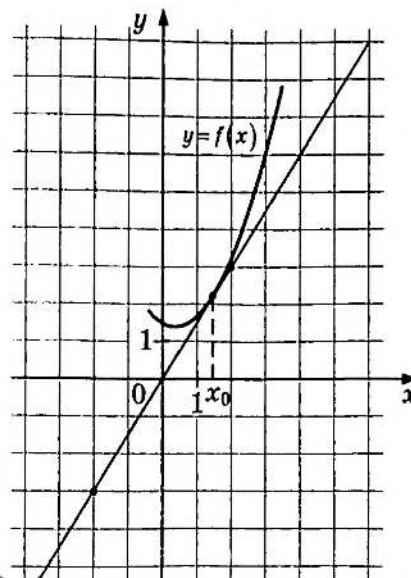
- 6 Найдите корень уравнения $\log_7(9 + x) = \log_7 2$.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $-32\sqrt{3}\operatorname{tg}(-600^\circ)$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

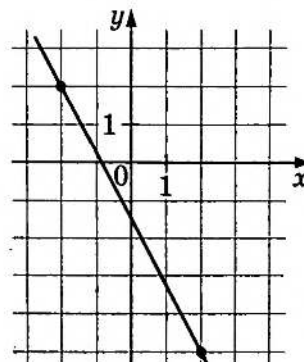
- 9 Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб. за ед.) задаётся формулой $q = 110 - 5p$. Выручка предприятия r (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 600 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб. за ед.

Ответ: _____.

- 10 Девять одинаковых рубашек дешевле куртки на 7%. На сколько процентов двенадцать таких же рубашек дороже куртки?

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение x , при котором выполнено $f(x) = 16$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите точку минимума функции $y = (25 - x)e^{25 - x}$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\frac{(x+3)^2}{5} + \frac{20}{(x+3)^2} = 8\left(\frac{x+3}{5} - \frac{2}{x+3}\right) + 1$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-6; -4]$.

14 В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 4, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{2}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $CK = 3$, а $C_1 L = 1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка A_1 , а основание — сечение данной призмы плоскостью γ .

15 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{4}} \left(\log_{\frac{1}{5}} (x+3) \right) \geq 3$.

16 31 декабря 2016 года Виктор взял в банке 3 972 000 рублей в кредит под 10 % годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10 %), затем Виктор переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x , чтобы Виктор выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

17 В трапеции $ABCD$ основания AD и BC . Диагональ AC разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и AB .

а) Докажите, что луч DB — биссектриса угла ADC .

б) Найдите AB , если известно, что $BD = 12$ и $AC = 7,5$.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2x^2 + y^2, \\ -x + y + 3z = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19 На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 3.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 11, если сначала по одному разу были написаны числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и 11?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 24, если сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 100 до 151 включительно?

в) Известно, что на доске осталось ровно два числа, а сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 100 до 151 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?



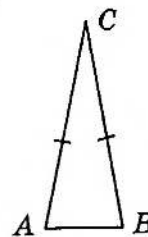
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ВАРИАНТ 25

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 В треугольнике ABC угол C равен 20° , стороны AC и BC равны. Найдите угол A . Ответ дайте в градусах.

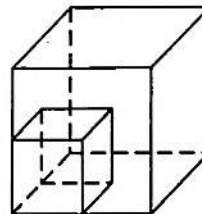


Ответ: _____.

- 2 Найдите косинус угла между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если известно, что $\vec{p}(33; -56)$ и $\vec{q}(-10; -24)$.

Ответ: _____.

- 3 Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если все его рёбра увеличить в 11 раз?



Ответ: _____.

- 4 Девять детей встают в хоровод в случайном порядке. Среди них Дима и его сестра Катя. Какова вероятность того, что Дима и Катя не окажутся рядом?

Ответ: _____.

- 5 Симметричную монету бросают 10 раз. Во сколько раз вероятность события «выпадет ровно 4 орла» больше вероятности события «выпадет ровно 3 орла»?

Ответ: _____.

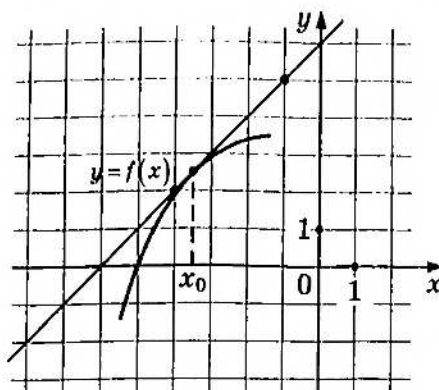
- 6 Найдите корень уравнения $\log_5(1+x) = \log_5 4$.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $-17\sqrt{3}\operatorname{tg}(1050^\circ)$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

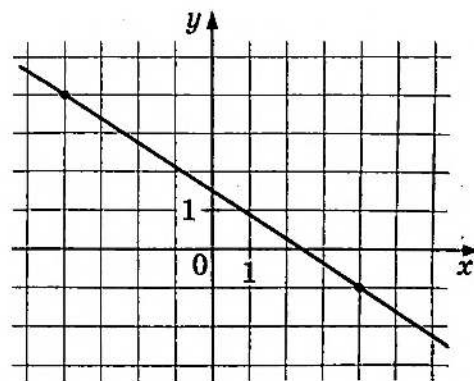
- 9 Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб. за ед.) задаётся формулой $q = 75 - 5p$. Выручка предприятия r (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 270 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб. за ед.

Ответ: _____.

- 10 Десять одинаковых рубашек дешевле куртки на 4%. На сколько процентов пятнадцать таких же рубашек дороже куртки?

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение x , при котором выполнено $f(x) = -7,25$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите точку минимума функции $y = (16 - x)e^{16-x}$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{8}{(x-1)^2} = 7\left(\frac{x-1}{4} - \frac{2}{x-1}\right) - 1$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2; 3]$.

14 В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{2}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $CK = 4$, а $C_1 L = 1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .

а) Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка A_1 , а основание — сечение данной призмы плоскостью γ .

15 Решите неравенство $\log_{\sqrt[3]{8}} \left(\log_{\frac{1}{7}} (x+1) \right) \geq 3$.

16 31 декабря 2016 года Александр взял в банке 3 276 000 рублей в кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20 %), затем Александр переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x , чтобы Александр выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

17 В трапеции $ABCD$ основания AD и BC . Диагональ AC разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и AB .

а) Докажите, что луч DB — биссектриса угла ADC .

б) Найдите AB , если известно, что $BD = 15$ и $AC = 8,5$.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} -x - 3y + 2z = x^2 + 3y^2, \\ x - 3y - 4z = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19 На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 3.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 13, если сначала по одному разу были написаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 21, если сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 140 до 191 включительно?

в) Известно, что на доске осталось ровно два числа, а сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 140 до 191 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

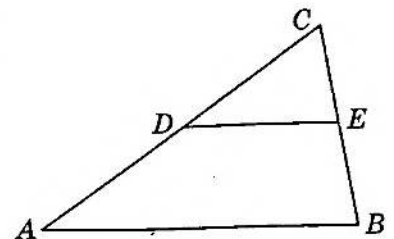
ВАРИАНТ 26

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

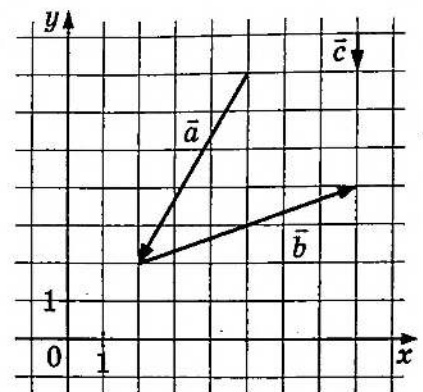
- 1 Площадь треугольника ABC равна 80, DE — средняя линия, параллельная стороне AB . Найдите площадь трапеции $ABED$.

Ответ: _____.



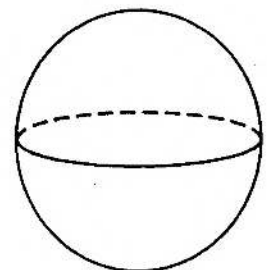
- 2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$.

Ответ: _____.



- 3 Площадь поверхности шара равна 8. Найдите площадь сечения этого шара плоскостью, проходящей через центр шара.

Ответ: _____.



- 4 Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 9 очков в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 6 очков, в случае ничьей — 3 очка, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,3.

Ответ: _____.

- 5 Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,4 при каждом отдельном выстреле. Сколько патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,8?

Ответ: _____.

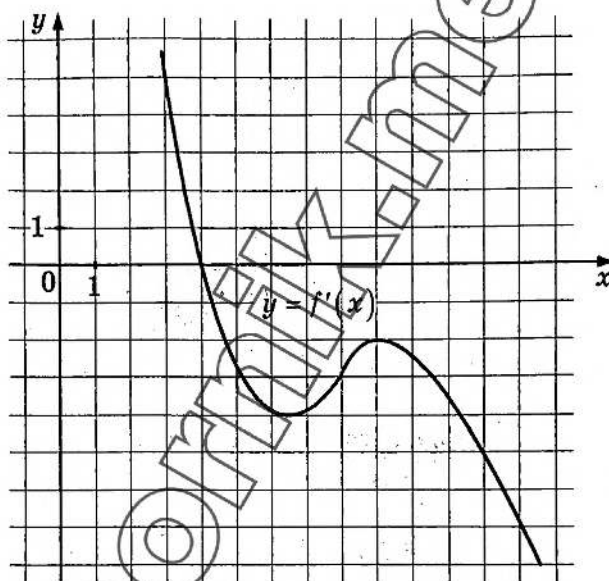
- 6 Найдите корень уравнения $3^{\log_9(2x+6)} = 6$.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $2 \sin \frac{23\pi}{12} \cdot \cos \frac{23\pi}{12}$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



Ответ: _____.

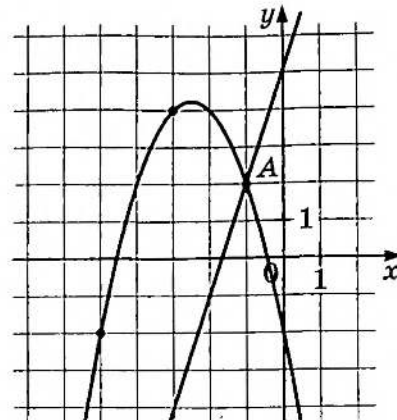
- 9 Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре равна $C = 6 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 7 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 32$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0,7$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 58,8 с. Ответ дайте в киловольтах.

Ответ: _____.

- 10 Автомобиль выехал с постоянной скоростью 54 км/ч из города А в город В, расстояние между которыми равно 153 км. Одновременно с ним из города С в город В, расстояние между которыми равно 120 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 50 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город В одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображены графики функций $f(x) = 3x + 5$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите ординату точки B .



Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции $y = 9^{x^2 - 6x + 10}$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $(4^x - 8)^2 - 10|4^x - 8| = 3 \cdot 4^x - 36$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2; 3]$.
- 14 Основанием правильной треугольной пирамиды $MAVC$ служит треугольник ABC со стороной 12. Ребро MA перпендикулярно грани MBC . Через вершину пирамиды M и середины рёбер AC и BC проведена плоскость α .
а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.
б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью AMB .
- 15 Решите неравенство $\frac{1}{\log_{(x-2)} \frac{x}{8}} \geq -1$.
- 16 Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений, увеличило налог на 25 % (до $t_1 = 1,25t_0$), сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, если известно, что при налоге, равном t рублей за единицу товара, объём производства товара составляет $7000 - t$ единиц, если это число положительно, и 0 единиц иначе?

- 17 Окружность с центром O , вписанная в прямоугольный треугольник ABC , касается гипотенузы AB в точке M , а катета AC — в точке N , $AC < BC$. Прямые MN и CO пересекаются в точке K .

а) Докажите, что угол CKN в два раза меньше угла ABC .

б) Найдите BK , если $BC = 2\sqrt{2}$.

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sin 2\sqrt{pax - x^2} - \sin \sqrt{pax - x^2} = 0$$

имеет ровно два решения.

- 19 У Игоря нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух из которых есть вода. За один шаг Игорь переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из ведер запрещается.

а) Мог ли Игорь через несколько шагов получить в одном из ведер ровно 3 литра воды, если сначала у него были ведра объёмами 5 литров и 9 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 10 литров?

б) Мог ли Игорь через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех ведрах, если сначала у него были ведра объёмами 11 литров и 7 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 8 литров?

в) Сначала у Игоря были ведра объёмами 6 литров и 12 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом n литров. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n , если известно, что Игорь сможет получить через несколько шагов ровно 7 литров воды в одном из ведер?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

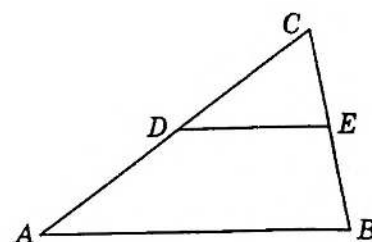
ВАРИАНТ 27

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

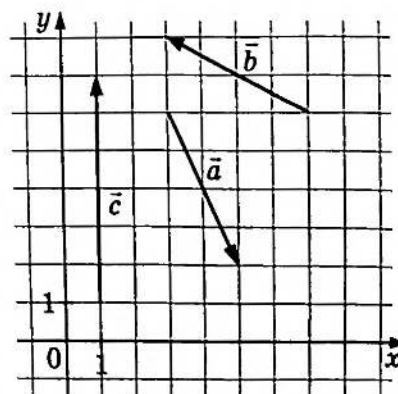
- 1 Площадь треугольника ABC равна 76, DE — средняя линия, параллельная стороне AB . Найдите площадь трапеции $ABED$.

Ответ: _____.



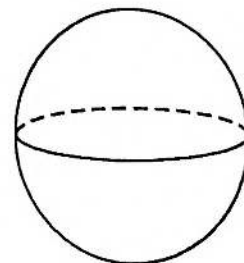
- 2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$.

Ответ: _____.



- 3 Площадь поверхности шара равна 208. Найдите площадь сечения этого шара плоскостью, проходящей через центр шара.

Ответ: _____.



- 4 Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 9 очков в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 7 очков, в случае ничьей — 2 очка, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,2.

Ответ: _____.

- 5 Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,7 при каждом отдельном выстреле. Сколько патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,95?

Ответ: _____.

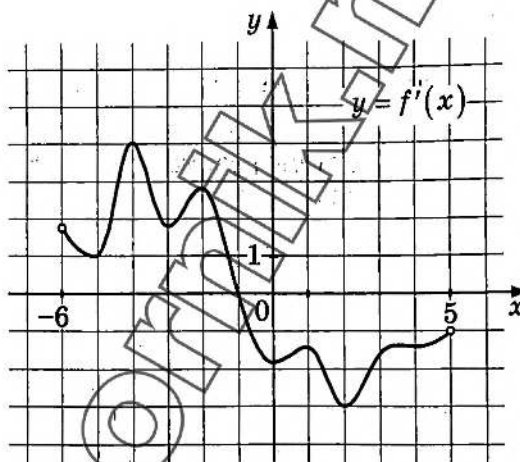
- 6 Найдите корень уравнения $2^{\log_8(2x-3)} = 5$.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $5\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8}$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-1; 4]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ: _____.

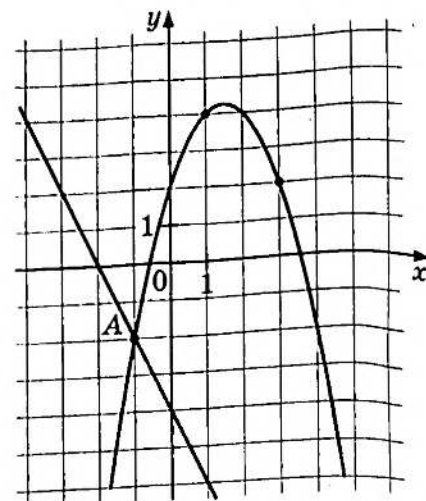
- 9 Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре равна $C = 3 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 7 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 8$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1,1$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 46,2 с. Ответ дайте в киловольтах.

Ответ: _____.

- 10 Автомобиль выехал с постоянной скоростью 82 км/ч из города А в город В, расстояние между которыми равно 123 км. Одновременно с ним из города С в город В, расстояние между которыми равно 63 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 45 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город В одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображены графики функций $f(x) = -2x - 4$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите ординату точки B .



Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции $y = 5x^2 + 30x + 229$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $(5^x - 6)^2 - 6|5^x - 6| + 5^2 = 25 - 5^x$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[1; 2]$.
- 14 Основанием правильной треугольной пирамиды $MABC$ служит треугольник ABC со стороной 6. Ребро MA перпендикулярно грани MBC . Через вершину пирамиды M и середины рёбер AC и BC проведена плоскость α .
а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.
б) Найдите угол между плоскостью α и ребром MC .
- 15 Решите неравенство $\frac{1}{\log_{(x-1)} \frac{x}{20}} \geq -1$.

- 16 Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений, увеличило налог в два с половиной раза (до $t_1 = 2,5t_0$), сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, если известно, что при налоге, равном t рублей за единицу товара, объём производства товара составляет $9000 - 2t$ единиц, если это число положительно, и 0 единиц иначе?

- 17 Окружность с центром O , вписанная в прямоугольный треугольник ABC , касается гипотенузы AB в точке M , а катета AC — в точке N , $AC < BC$. Прямые MN и CO пересекаются в точке K .

- а) Докажите, что угол CKN в два раза меньше угла ABC .
б) Найдите BK , если $BC = 10\sqrt{2}$.

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sin 2\sqrt{2\pi x - x^2 + \frac{a^2}{4}} + \cos \sqrt{2\pi x - x^2 + \frac{a^2}{4}} = 0$$

имеет ровно два решения.

- 19 У Ромы нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух из которых есть вода. За один шаг Рома переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из вёдер запрещается.

- а) Мог ли Рома через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 4 литра воды, если сначала у него были вёдра объёмами 3 литра и 8 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 9 литров?
б) Мог ли Рома через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех вёдрах, если сначала у него были вёдра объёмами 8 литров и 10 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 11 литров?
в) Сначала у Ромы были вёдра объёмами 4 литра и 8 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом n литров. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n , если известно, что Рома сможет получить через несколько шагов ровно 5 литров воды в одном из вёдер?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

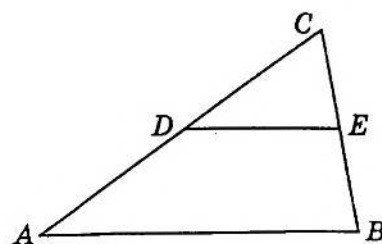
ВАРИАНТ 28

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

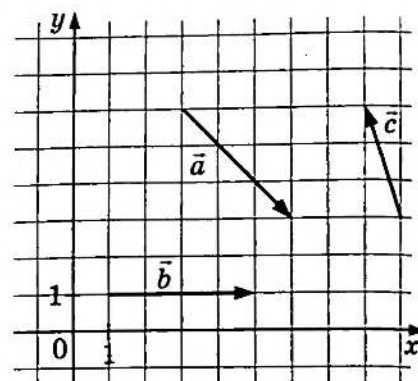
- 1 Площадь треугольника ABC равна 44, DE — средняя линия, параллельная стороне AB . Найдите площадь трапеции $ABED$.

Ответ: _____.



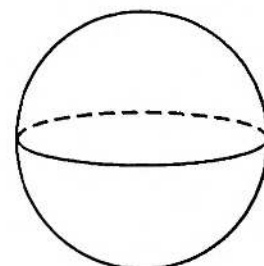
- 2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Ответ: _____.



- 3 Площадь поверхности шара равна 120. Найдите площадь сечения этого шара плоскостью, проходящей через центр шара.

Ответ: _____.



- 4 Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 6 очков в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 5 очков, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

Ответ: _____.

- 5 Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,1 при каждом отдельном выстреле. Сколько патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,4?

Ответ: _____.

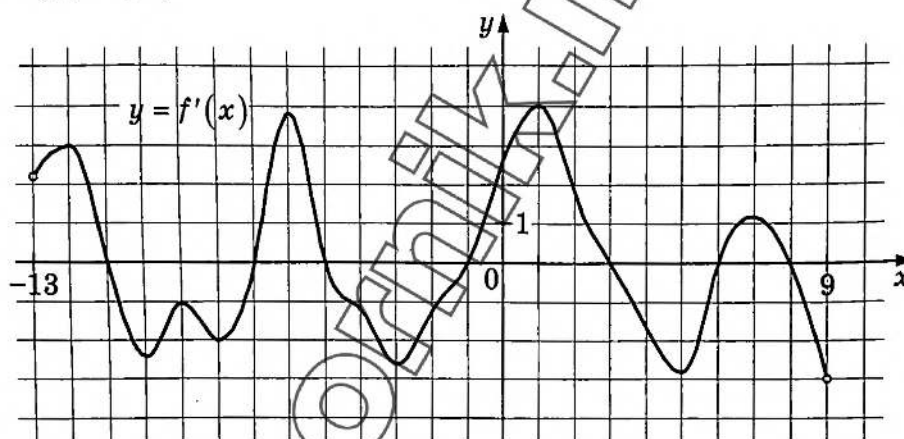
- 6 Найдите корень уравнения $3^{\log_9(2x+5)} = 3$.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $3 \sin \frac{19\pi}{12} \cdot \cos \frac{19\pi}{12}$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-13; 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-12; 5]$.



Ответ: _____.

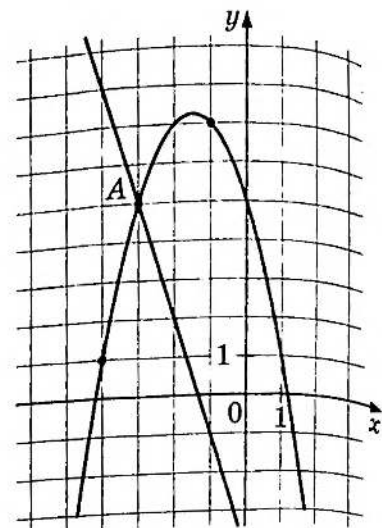
- 9 Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре равна $C = 4 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 4 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 36$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 2$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 64 с. Ответ дайте в киловольтах.

Ответ: _____.

- 10 Автомобиль выехал с постоянной скоростью 60 км/ч из города А в город В, расстояние между которыми равно 300 км. Одновременно с ним из города С в город В, расстояние между которыми равно 325 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 40 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город В одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображены графики функций $f(x) = -3x - 4$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите ординату точки B .



Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции $y = 3x^2 - 18x + 85$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $2(3^x - 5)^2 + 3^x + 19 = 15|3^x - 5|$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 1]$.

- 14 Основанием правильной треугольной пирамиды $MAVC$ служит треугольник ABC со стороной $3\sqrt{2}$. Ребро MA перпендикулярно грани MBC . Через вершину пирамиды M и середины рёбер AC и BC проведена плоскость α .

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите расстояние от вершины B до плоскости α .

- 15 Решите неравенство $\frac{1}{\log_{(x-4)} \frac{x}{12}} \geq -1$.

16 15 августа планируется взять кредит в банке на 20 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 21 % больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r .

17 Окружность с центром O , вписанная в прямоугольный треугольник ABC , касается гипотенузы AB в точке M , а катета AC — в точке N , $AC < BC$. Прямые MN и CO пересекаются в точке K .

- а) Докажите, что угол CKN в два раза меньше угла ABC .
- б) Найдите BK , если $BC = 6\sqrt{2}$.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sin \sqrt{a}x - x^2 + \cos 2\sqrt{a}x - x^2 = 0$$

имеет ровно два решения.

19 У Жени нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух из которых есть вода. За один шаг Женя переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из вёдер запрещается.

- а) Мог ли Женя через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 6 литров воды, если сначала у него были вёдра объёмами 5 литров и 8 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 9 литров?
- б) Мог ли Женя через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех вёдрах, если сначала у него были вёдра объёмами 7 литров и 8 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 10 литров?
- в) Сначала у Жени были вёдра объёмами 5 литров и 10 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом n литров. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n , если известно, что Женя сможет получить через несколько шагов ровно 6 литров воды в одном из вёдер?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

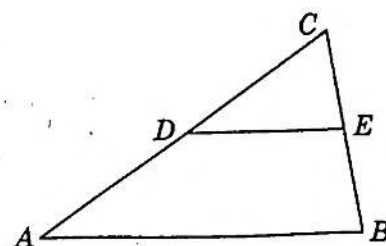
ВАРИАНТ 29

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

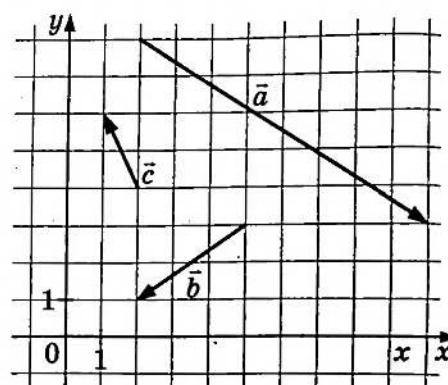
- 1 Площадь треугольника ABC равна 40, DE — средняя линия, параллельная стороне AB . Найдите площадь трапеции $ABED$.

Ответ: _____.



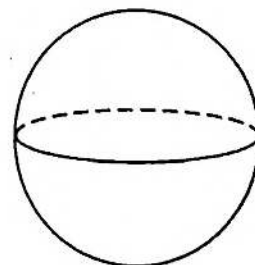
- 2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $(\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{c}$.

Ответ: _____.



- 3 Площадь поверхности шара равна 16. Найдите площадь сечения этого шара плоскостью, проходящей через центр шара.

Ответ: _____.



- 4 При изготовлении подшипников диаметром 74 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше, чем на 0,01 мм, равна 0,987. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше, чем 73,99 мм, или больше, чем 74,01 мм.

Ответ: _____.

- 5 В коробке 6 синих, 10 красных и 9 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

Ответ: _____.

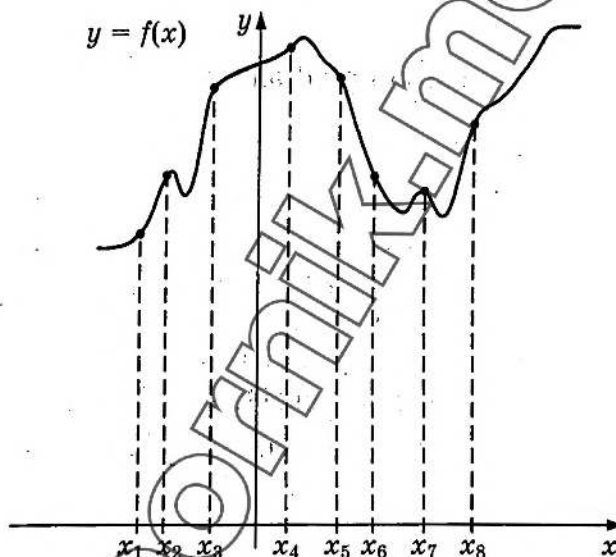
- 6 Найдите корень уравнения $2^{\log_4(9x+9)} = 6$.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $5 \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12}$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, \dots, x_8$. Сколько из этих точек удовлетворяют неравенству $f'(x) > 0$?



Ответ: _____.

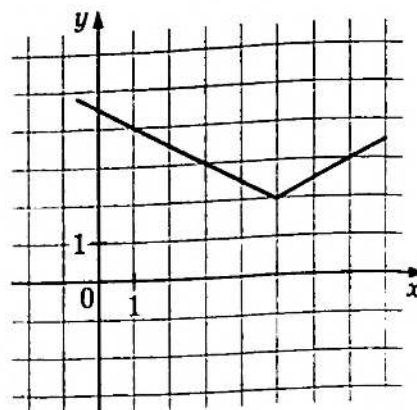
- 9 Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре равна $C = 2 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 6 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 10$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0,7$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 16,8 с. Ответ дайте в киловольтах.

Ответ: _____.

- 10 Автомобиль выехал с постоянной скоростью 63 км/ч из города А в город В, расстояние между которыми равно 168 км. Одновременно с ним из города С в город В, расстояние между которыми равно 174 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 15 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город В одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = |kx + b| + c$, где $k > 0$. Найдите значение $f(-10, 8)$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{x^2 - 16x + 67}$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $(4^x - 5)^2 + 2 \cdot 4^x = 9|4^x - 5|$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 1]$.
- 14 Основанием правильной треугольной пирамиды $MABC$ служит треугольник ABC со стороной $2\sqrt{3}$. Ребро MA перпендикулярно грани MBC . Через вершину пирамиды M и середины рёбер AC и BC проведена плоскость α .
а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.
б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α .
- 15 Решите неравенство $\frac{1}{\log_{(x-3)} \frac{x}{10}} \geq -1$.
- 16 По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 17 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 9 % в первый год и на целое число n процентов за второй год. Найдите наименьшее значение n , при котором за два года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

- 17 Окружность с центром O , вписанная в прямоугольный треугольник ABC , касается гипотенузы AB в точке M , а катета AC — в точке N , $AC < BC$. Прямые MN и CO пересекаются в точке K .
- а) Докажите, что угол CKN в два раза меньше угла ABC .
- б) Найдите BK , если $BC = 5\sqrt{2}$.

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\cos \sqrt{2ax - 4x^2} + \cos 2\sqrt{2ax - 4x^2} = 0$$

имеет ровно два решения.

- 19 У Вити нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух из которых есть вода. За один шаг Витя переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из вёдер запрещается.
- а) Мог ли Витя через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 5 литров воды, если сначала у него были вёдра объёмами 3 литра и 6 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 7 литров?
- б) Мог ли Витя через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех вёдрах, если сначала у него были вёдра объёмами 6 литров и 9 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 7 литров?
- в) Сначала у Вити были вёдра объёмами 2 литра и 4 литра, полные воды, а также пустое ведро объёмом n литров. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n , если известно, что Витя сможет получить через несколько шагов ровно 3 литра воды в одном из вёдер?



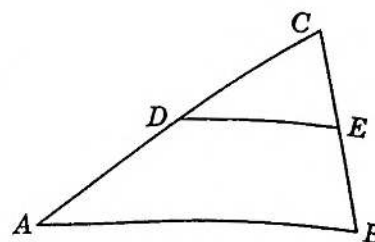
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ВАРИАНТ 30

Часть 1

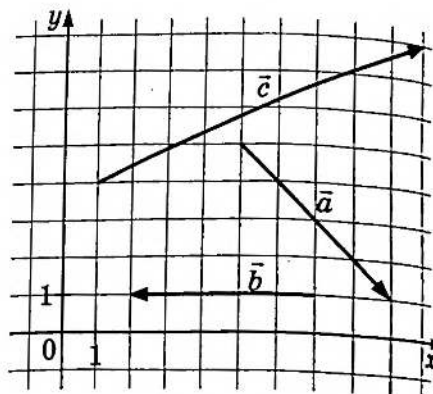
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Площадь треугольника ABC равна 36, DE — средняя линия, параллельная стороне AB . Найдите площадь трапеции $ABED$.



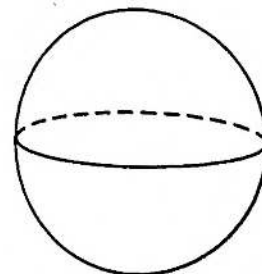
Ответ: _____.

- 2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с целочисленными координатами. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c})$.



Ответ: _____.

- 3 Площадь поверхности шара равна 80. Найдите площадь сечения этого шара плоскостью, проходящей через центр шара.



Ответ: _____.

- 4 При изготовлении подшипников диаметром 62 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше, чем на 0,01 мм, равна 0,965. Найдите вероятность, того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше, чем 61,99 мм, или больше, чем 62,01 мм.

Ответ: _____.

- 5 В коробке 6 синих, 12 красных и 7 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

Ответ: _____.

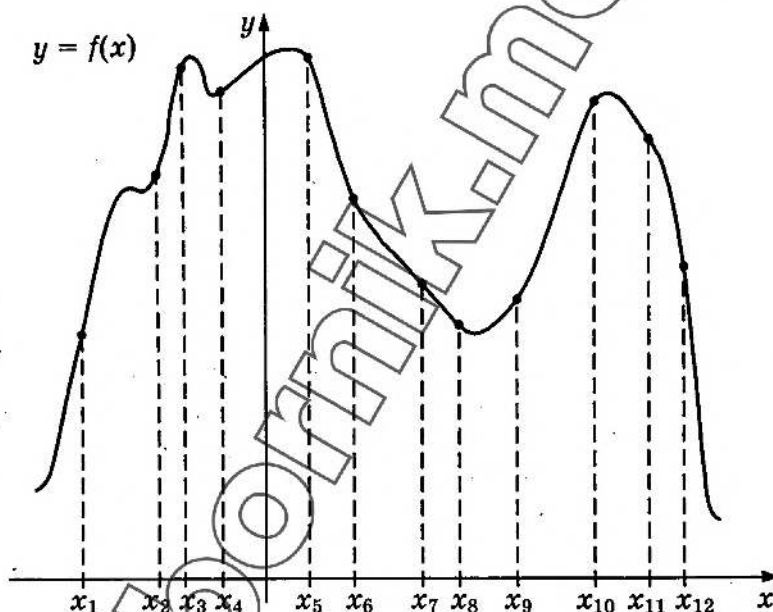
- 6 Найдите корень уравнения $3^{\log_{81}(8x+8)} = 4$.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $4\sqrt{2} \sin \frac{7\pi}{8} \cdot \cos \frac{7\pi}{8}$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \dots, x_{12}$. Сколько из этих точек удовлетворяют неравенству $f'(x) > 0$?



Ответ: _____.

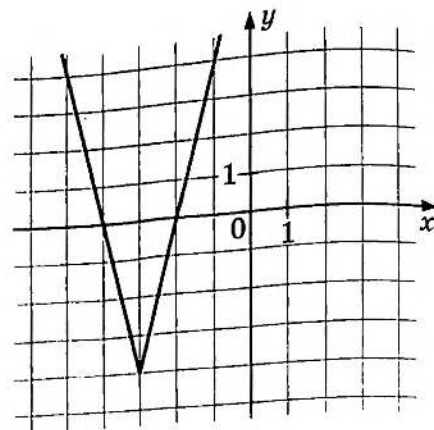
- 9 Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре равна $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 16$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0,7$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 35 с. Ответ дайте в киловольтах.

Ответ: _____.

- 10 Автомобиль выехал с постоянной скоростью 86 км/ч из города А в город В, расстояние между которыми равно 344 км. Одновременно с ним из города С в город В, расстояние между которыми равно 300 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 40 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город В одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = |kx + b| + c$, где числа k , b и c — целые, $k > 0$. Найдите значение $f(-5, 6)$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции $y = 4^{x^2 - 14x + 50}$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $(3^x - 6)^2 - 16|3^x - 6| = 15 - 2 \cdot 3^{x+1}$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[1; 2]$.
- 14 Основанием правильной треугольной пирамиды $MAVC$ служит треугольник ABC со стороной 6. Ребро MA перпендикулярно грани MBC . Через вершину пирамиды M и середины рёбер AC и BC проведена плоскость α .
а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.
б) Найдите расстояние от вершины C до плоскости α .
- 15 Решите неравенство $\frac{1}{\log_{(x-1)} \frac{x}{6}} \geq -1$.
- 16 По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 14 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 8 % в первый год и на целое число n процентов за второй год. Найдите наименьшее значение n , при котором за два года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

- 17 Окружность с центром O , вписанная в прямоугольный треугольник ABC , касается гипотенузы AB в точке M , а катета AC — в точке N , $AC < BC$. Прямые MN и CO пересекаются в точке K .
- а) Докажите, что угол CKN в два раза меньше угла ABC .
- б) Найдите BK , если $BC = 3\sqrt{2}$.

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sin \sqrt{ax - x^2 - \pi^2} + \cos 2\sqrt{ax - x^2 - \pi^2} = 0$$

имеет ровно два решения.

- 19 У Бори нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух из которых есть вода. За один шаг Боря переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из вёдер запрещается.
- а) Мог ли Боря через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 2 литра воды, если сначала у него были ведра объёмами 4 литра и 7 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 8 литров?
- б) Мог ли Боря через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех вёдрах, если сначала у него были ведра объёмами 5 литров и 7 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 10 литров?
- в) Сначала у Бори были ведра объёмами 3 литра и 6 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом n литров. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n , если известно, что Боря сможет получить через несколько шагов ровно 4 литра воды в одном из вёдер?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

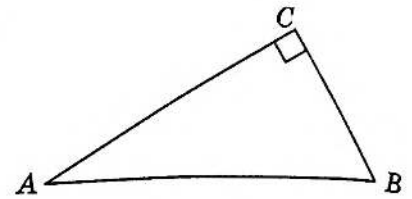
ВАРИАНТ 31

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 4$, $\sin A = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Найдите BC .

Ответ: _____.

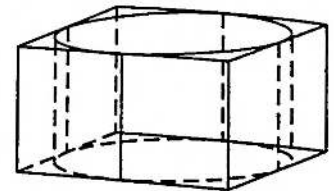


- 2 Даны векторы $\vec{m}(6; -2)$, $\vec{n}(-1; 4)$, $\vec{k}(-2; 8)$ и $\vec{p}(1; 4)$. Найдите скалярное произведение $(\vec{m} + \vec{n}) \cdot (\vec{k} + \vec{p})$.

Ответ: _____.

- 3 Цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед. Радиус основания и высота цилиндра равны 2. Найдите объём параллелепипеда.

Ответ: _____.



- 4 Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 16 спортсменов из России, в том числе Тарас Куницын. Найдите вероятность того, что в первом туре Тарас Куницын будет играть с каким-либо бадминтонистом из России.

Ответ: _____.

- 5 При выборочном обследовании жителей города А. 12 из 24 респондентов ответили «Нет» на вопрос, понравился ли им новый торговый центр. Найдите интервальную оценку доли горожан, которым торговый центр не понравился, пользуясь правилом «частота плюс-минус одно стандартное отклонение». В ответ запишите верхнюю границу доверительного интервала.

Ответ: _____.

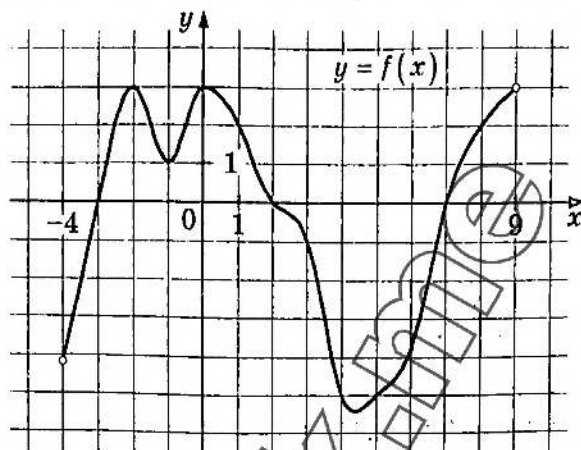
6 Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x-9} = 1$.

Ответ: _____.

7 Найдите значение выражения $5 \cdot 9^{\log_9 2}$.

Ответ: _____.

8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 9)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна.



Ответ: _____.

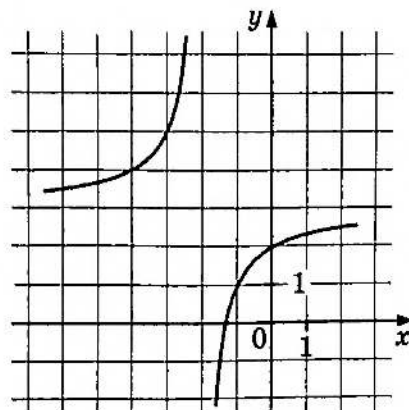
9 Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p = 500$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 300$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 400\,000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Определите месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет равна 300 000 руб.

Ответ: _____.

10 Лодка в 5:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 30 км от А. Пробыв в пункте В 2 часа, лодка отправилась назад и вернулась в пункт А в 23:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость лодки, если известно, что скорость течения реки 1 км/ч.

Ответ: _____.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, где числа a , b и c — целые. Найдите значение $f(48)$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции $y = -24 + \frac{31\sqrt{3}\pi}{6} - \frac{31\sqrt{3}}{2}x - 31\cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $16\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 = 0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.
- 14 Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с основанием $ABCD$. Из точки B опущен перпендикуляр BH на плоскость SAD .
а) Докажите, что $\angle AHC = 90^\circ$.
б) Найдите объём пирамиды, если $HA = 1$ и $HC = \sqrt{31}$.
- 15 Решите неравенство $0,25^{\frac{x+3}{x-2}} \cdot 30^x \cdot x^{-2} \leq \frac{16^{\frac{x+3}{x-2}} \cdot 15^x}{8x^2}$.
- 16 На каждом из двух комбинатов изготавливают детали А и В. На первом комбинате работает 500 человек, и один рабочий изготавливает за смену 8 деталей А или 2 детали В. На втором комбинате работает 200 человек, и один рабочий изготавливает за смену 2 детали А или 8 деталей В.
Оба эти комбината поставляют детали на комбинат, на котором собирают изделие, для изготовления которого нужна 1 деталь А и 3 детали В. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать комбинат за смену?
- 17 В равнобедренной трапеции $KLMN$ с основаниями LM и KN расположены две окружности с центрами O_1 и O_2 , каждая из которых касается другой окружности, двух боковых сторон и одного из оснований. Пусть общая касательная окружностей, проходящая через их точку касания, пересекает боковые стороны в точках А и В.
а) Докажите, что $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$.
б) Найдите площадь трапеции $KLMN$, если известно, что $AB = 6\sqrt{3}$, а радиус одной окружности втрое больше радиуса другой.

- 18 Найдите все значения a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} |y + x^3| - |y + 3x| = 2y + x^3 + 3x, \\ |-y - 3x + 1| - |y + x^3 - a| = -3y - 6x - x^3 + a + 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

- 19 На доске разрешается написать n таких попарно различных натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, для которых при каждом натуральном числе $k = 2, \dots, n - 1$ выполнено равенство $a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1}$.

а) Можно ли при $n = 4$ написать на доске такие числа, чтобы также выполнялось равенство $a_4 = 2022$?

б) Можно ли при $n = 100$ написать на доске такие числа, сумма которых равна 2022?

в) При $n = 10$ на доске написаны такие числа, причём $a_{10} = 2022$. Какое наименьшее значение может принимать a_1 ?



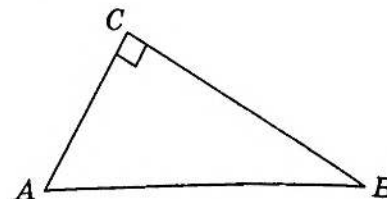
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 9$, $\sin A = \frac{4}{5}$. Найдите BC .

Ответ: _____.

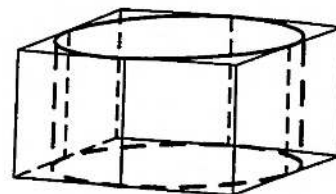


- 2 Даны векторы $\vec{m}(8; 5)$, $\vec{n}(-4; -7)$, $\vec{k}(-2; 3)$ и $\vec{p}(-1; -1)$. Найдите скалярное произведение $(\vec{m} + \vec{n}) \cdot (\vec{k} + \vec{p})$.

Ответ: _____.

- 3 Цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед. Радиус основания и высота цилиндра равны 15. Найдите объём параллелепипеда.

Ответ: _____.



- 4 Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 теннисистов, среди которых 20 спортсменов из России, в том числе Максим Плотвин. Найдите вероятность того, что в первом туре Максим Плотвин будет играть с каким-либо теннисистом из России.

Ответ: _____.

- 5 При выборочном обследовании клиентов сети автозаправочных станций «Огонёк» 12 из 36 случайных респондентов ответили «Нет» на вопрос, есть ли у них бонусная карта сети. Найдите интервальную оценку доли клиентов, не имеющих бонусной карты, пользуясь правилом «частота плюс-минус 2 стандартных отклонения». В ответ запишите длину доверительного интервала.

Ответ: _____.

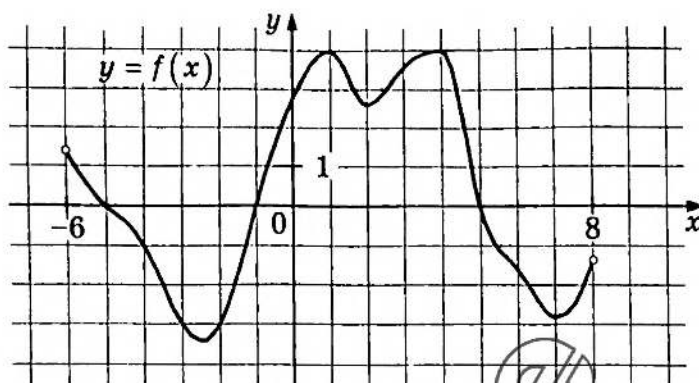
- 6 Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x-7} = 3$.

Ответ: _____.

7 Найдите значение выражения $6 \cdot 5^{\log_5 2}$.

Ответ: _____.

8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 8)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна.



Ответ: _____.

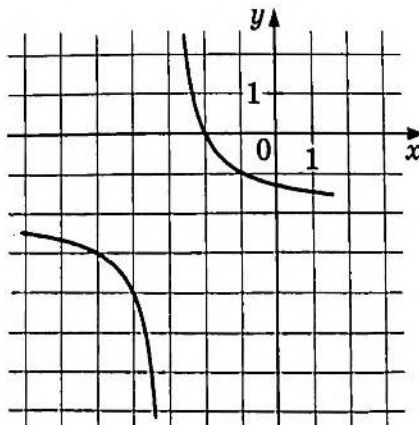
9 Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p = 400$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 200$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 200\,000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Определите месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет равна $300\,000$ руб.

Ответ: _____.

10 Баржа в 8:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 30 км от А. Пробыв в пункте В 1 час 30 минут, баржа отправилась назад и вернулась в пункт А в 22:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость баржи, если известно, что скорость течения реки 1 км/ч.

Ответ: _____.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, где числа a , b и c — целые. Найдите значение $f(17)$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции $y = 25 + \frac{11\pi}{4} - 11x - 11\sqrt{2} \cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 = 0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.
- 14 Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с основанием $ABCD$. Из точки B опущен перпендикуляр BH на плоскость SAD .
а) Докажите, что $\angle AHC = 90^\circ$.
б) Найдите объём пирамиды, если $HA = 2$ и $HC = 2\sqrt{17}$.
- 15 Решите неравенство $0,25^{\frac{3x-2}{x+2}} \cdot 14^x \cdot x^{-2} \leq \frac{2^{\frac{3x-2}{x+2}} \cdot 112^x}{4x^2}$.
- 16 На каждом из двух комбинатов изготавливают детали А и В. На первом комбинате работает 300 человек, и один рабочий изготавливает за смену 9 деталей А или 3 детали В. На втором комбинате работает 600 человек, и один рабочий изготавливает за смену 3 детали А или 9 деталей В.
Оба эти комбината поставляют детали на комбинат, на котором собирают изделие, для изготовления которого нужны 2 детали А и 3 детали В. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать комбинат за смену?
- 17 В равнобедренной трапеции $KLMN$ с основаниями LM и KN расположены две окружности с центрами O_1 и O_2 , каждая из которых касается другой окружности, двух боковых сторон и одного из оснований. Пусть общая касательная окружностей, проходящая через их точку касания, пересекает боковые стороны в точках A и B .
а) Докажите, что $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$.
б) Найдите площадь трапеции $KLMN$, если известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, а радиус одной окружности вдвое больше радиуса другой.

18 Найдите все значения a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} \left| y + \frac{1}{3}x^3 \right| - |y + 4x| = 2y + \frac{1}{3}x^3 + 4x, \\ \left| -y - 4x + 1 \right| - \left| y + \frac{1}{3}x^3 - a + 1 \right| = -3y - 8x - \frac{1}{3}x^3 + a - 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19 На доске разрешается написать n таких попарно различных натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, для которых при каждом натуральном числе $k = 2, \dots, n - 1$ выполнено равенство $a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1}$.

а) Можно ли при $n = 4$ написать на доске такие числа, чтобы также выполнялось равенство $a_4 = 2021$?

б) Можно ли при $n = 100$ написать на доске такие числа, сумма которых равна 2021?

в) При $n = 10$ на доске написаны такие числа, причём $a_{10} \neq 2021$. Какое наименьшее значение может принимать a_1 ?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

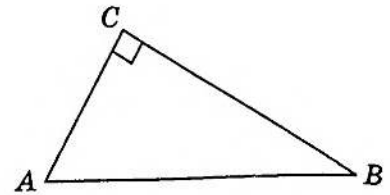
ВАРИАНТ 33

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 25$, $\sin A = \frac{12}{13}$. Найдите BC .

Ответ: _____.

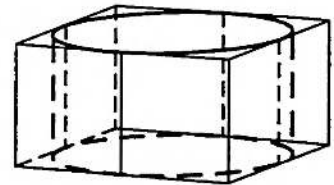


- 2 Даны векторы $\vec{m}(-9; 2)$, $\vec{n}(-4; 4)$, $\vec{k}(11; -8)$ и $\vec{p}(-5; -4)$. Найдите скалярное произведение $(\vec{m} - \vec{n}) \cdot (\vec{k} + \vec{p})$.

Ответ: _____.

- 3 Цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед. Радиус основания и высота цилиндра равны 11. Найдите объём параллелепипеда.

Ответ: _____.



- 4 Перед началом первого тура чемпионата по шашкам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвуют 26 шашистов, среди которых 8 спортсменов из России, в том числе Борис Барсуков. Найдите вероятность того, что в первом туре Борис Барсуков будет играть с каким-либо шашистом из России.

Ответ: _____.

- 5 При выборочном обследовании клиентов сети автозаправочных станций «Огонёк» 24 из 36 случайных респондентов ответили «Да» на вопрос, есть ли у них бонусная карта сети. Найдите интервальную оценку доли клиентов, имеющих бонусную карту, пользуясь правилом «частота плюс-минус 2 стандартных отклонения». В ответ запишите верхнюю границу доверительного интервала.

Ответ: _____.

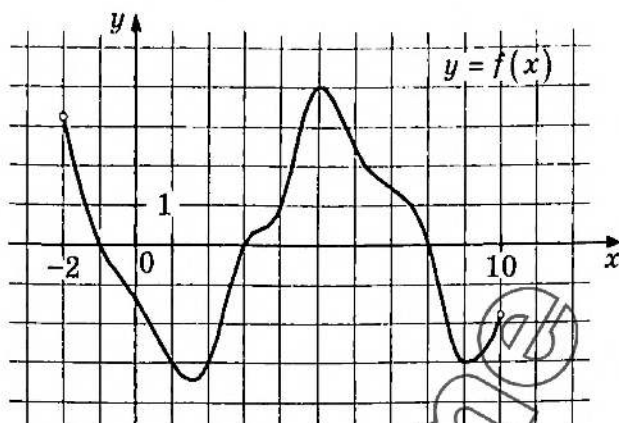
- 6 Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x+7} = 8$.

Ответ: _____.

7 Найдите значение выражения $10 \cdot 10^{\log_{10} 7}$.

Ответ: _____.

8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 10)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна.



Ответ: _____.

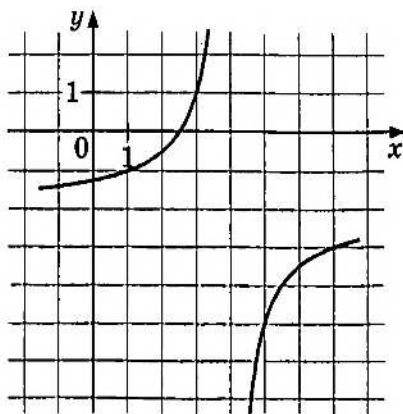
9 Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p = 700$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 300$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 500\,000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Определите месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет равна 700 000 руб.

Ответ: _____.

10 Моторная лодка в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 30 км от А. Пробыв в пункте В 2 часа 30 минут, лодка отправилась назад и вернулась в пункт А в 18:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость лодки, если известно, что скорость течения реки 1 км/ч.

Ответ: _____.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, где числа a , b и c — целые. Найдите значение $f(29)$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите наименьшее значение функции $y = 36 + \frac{\sqrt{3}\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}x - 3\cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $4\sin^4 x - 4\sin^2 x + 1 = 0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[3\pi; 4\pi]$.
- 14 Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с основанием $ABCD$. Из точки B опущен перпендикуляр BH на плоскость SAD .
а) Докажите, что $\angle AHC = 90^\circ$.
б) Найдите объём пирамиды, если $HA = 2$ и $HC = 2\sqrt{7}$.
- 15 Решите неравенство $0,2^{\frac{2x+3}{x-5}} \cdot 15^{-2x} \cdot 25x^{-2} \geq \frac{25^{\frac{2x+3}{x-5}} \cdot 9^x}{5x^2}$.
- 16 На каждом из двух комбинатов изготавливают детали А и В. На первом комбинате работает 400 человек, и один рабочий изготавливает за смену 8 деталей А или 4 детали В. На втором комбинате работает 700 человек, и один рабочий изготавливает за смену 4 детали А или 8 деталей В.
Оба эти комбината поставляют детали на комбинат, на котором собирают изделие, для изготовления которого нужны 2 детали А и 5 деталей В. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать комбинат за смену?
- 17 В равнобедренной трапеции $KLMN$ с основаниями LM и KN расположены две окружности с центрами O_1 и O_2 , каждая из которых касается другой окружности, двух боковых сторон и одного из оснований. Пусть общая касательная окружностей, проходящая через их точку касания, пересекает боковые стороны в точках А и В.
а) Докажите, что $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$.
б) Найдите площадь трапеции $KLMN$, если известно, что $AB = 4\sqrt{3}$, а радиус одной окружности втрое больше радиуса другой.

- 18 Найдите все значения a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} \left| y + \frac{1}{2}x^3 \right| - \left| y + \frac{3}{2}x \right| = 2y + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x, \\ \left| -y - \frac{3}{2}x + 1 \right| - \left| y + \frac{1}{2}x^3 - a \right| = -4y - \frac{9}{2}x - \frac{1}{2}x^3 + a + 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

- 19 На доске разрешается написать n таких попарно различных натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, для которых при каждом натуральном числе $k = 2, \dots, n-1$ выполнено равенство $a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1}$.
- а) Можно ли при $n = 4$ написать на доске такие числа, чтобы также выполнялось равенство $a_4 = 2020$?
- б) Можно ли при $n = 100$ написать на доске такие числа, сумма которых равна 2020?
- в) При $n = 10$ на доске написаны такие числа, причём $a_{10} = 2020$. Какое наименьшее значение может принимать a_1 ?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ВАРИАНТ 34

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Концы отрезка AB лежат по разные стороны от прямой l . Расстояние от точки A до прямой l равно 7, а расстояние от точки B до прямой l равно 13. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой l .

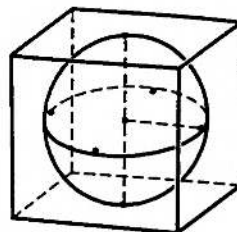
Ответ: _____.

- 2 Даны векторы $\vec{m}(2; -11)$, $\vec{n}(7; 8)$, $\vec{k}(-5; 1)$ и $\vec{p}(-11; 3)$. Найдите скалярное произведение $(\vec{m} - \vec{n}) \cdot (\vec{k} - \vec{p})$.

Ответ: _____.

- 3 Шар, объём которого равен 14π , вписан в куб. Найдите объём куба.

Ответ: _____.



- 4 Андрей отправляет СМС другу. Связь не очень устойчивая, поэтому каждая попытка отправить СМС имеет вероятность успеха 0,8. Найдите вероятность того, что СМС будет отправлена с третьей попытки.

Ответ: _____.

- 5 Маша коллекционирует принцесс из Киндер-сюрпризов. Всего в коллекции 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном Киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс.

У Маши уже есть четыре разные принцессы из коллекции. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы Маше придётся купить ещё 1 или 2 шоколадных яйца?

Ответ: _____.

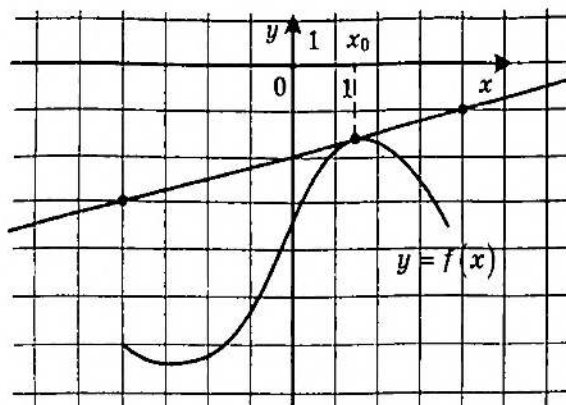
- 6 Найдите корень уравнения $x^2 - 15 = (x - 15)^2$.

Ответ: _____.

- 7 Вычислите значение выражения $3^{\log_3 7} + 49^{\log_7 \sqrt{13}}$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

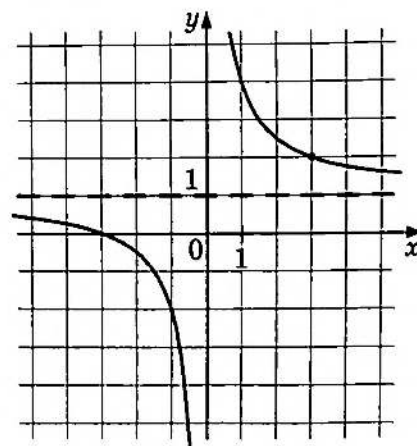
- 9 Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 — температура нагревателя (в кельвинах), T_2 — температура холодильника (в кельвинах). При какой температуре нагревателя T_1 КПД двигателя будет 15 %, если температура холодильника $T_2 = 340$ К? Ответ дайте в кельвинах.

Ответ: _____.

- 10 Из пункта А круговой трассы, длина которой равна 30 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобилиста. Скорость первого равна 92 км/ч, скорость второго — 77 км/ч. Через сколько минут первый автомобилист будет опережать второго ровно на 1 круг?

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите $f(-12)$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите наибольшее значение функции $y = 6 \sin x - 3\sqrt{3}x + 0,5\sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13** а) Решите уравнение $6 \sin^2 x + 7 \cos x - 7 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\pi]$.
- 14** В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер $AA_1 = 7$, $AB = 16$, $AD = 6$. Точка K — середина ребра $C_1 D_1$.
а) Докажите, что плоскость, проходящая через точку B перпендикулярно прямой AK , пересекает отрезок $A_1 K$.
б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью ABC .
- 15** Решите неравенство $x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2 + 2x - 10}{x - 5} \leq 2$.
- 16** 15 января планируется взять кредит в банке на 18 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?
- 17** На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB , N — точка пересечения прямых CM и DK .
а) Докажите, что прямые CM и DK перпендикулярны.
б) Найдите MN , если известно, что катеты треугольника ABC равны 130 и 312.
- 18** Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение
- $$10 \cdot 0,2^{1-x} - a - |5^x + 2a| = 0,04^{-x}$$
- имеет ровно два неотрицательных решения.
- 19** Конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n - 2$ выполнено равенство $3a_{k+2} = 5a_{k+1} - 2a_k$.
а) Приведите пример такой последовательности при $n = 4$.
б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geq 3$ выполняться равенство $a_n = 3a_2 - 2a_1$?
в) Какое наименьшее значение может принимать a_1 , если $a_n = 667$?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

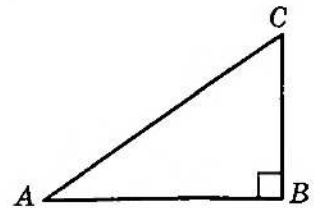
ВАРИАНТ 35

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Один острый угол прямоугольного треугольника на 30° больше другого. Найдите больший острый угол. Ответ дайте в градусах.

Ответ: _____.

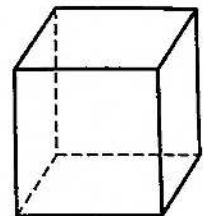


- 2 Даны векторы $\vec{m}(-8; 7)$, $\vec{n}(-5; 1)$, $\vec{k}(-7; -2)$ и $\vec{p}(9; 5)$. Найдите скалярное произведение $(\vec{m} + \vec{n}) \cdot (\vec{k} + \vec{p})$.

Ответ: _____.

- 3 Во сколько раз увеличится объём куба, если все его рёбра увеличить в семь раз?

Ответ: _____.



- 4 В торговом центре два одинаковых автомата продают чай. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится чай, равна 0,4. Вероятность того, что чай закончится в обоих автоматах, равна 0,2. Найдите вероятность того, что к концу дня чай останется в обоих автоматах.

Ответ: _____.

- 5 Первый член последовательности целых чисел равен 0. Каждый следующий член последовательности с вероятностью $p = \frac{10}{17}$ на единицу больше предыдущего и с вероятностью $1 - p$ на единицу меньше предыдущего. Какова вероятность того, что какой-то член этой последовательности окажется равен -1 ?

Ответ: _____.

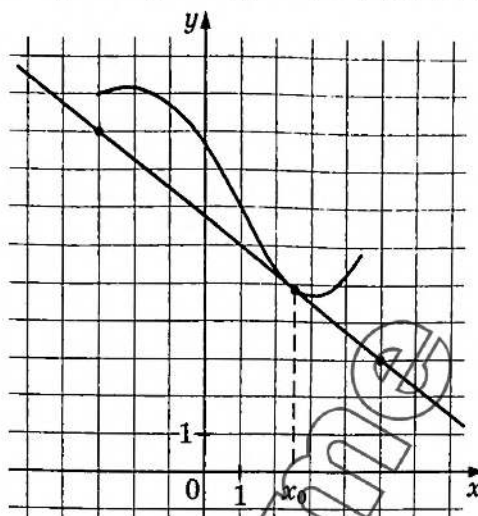
- 6 Решите уравнение $3^{x-3} = 27$.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $(\sqrt{12} - \sqrt{6})(\sqrt{12} + \sqrt{6})$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

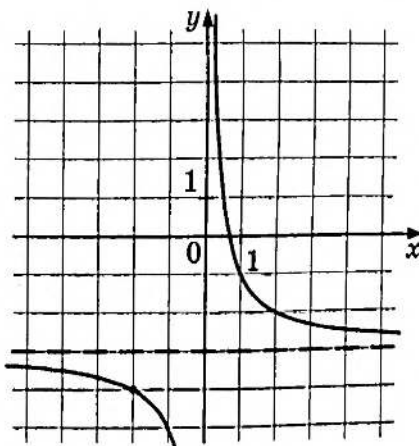
- 9 Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1 V_1^{1,4} = p_2 V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 313,6 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

Ответ: _____.

- 10 Брюки дороже рубашки на 30 % и дешевле пиджака на 22 %. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите $f(50)$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите точку минимума функции $y = (1 - 2x)\cos x + 2\sin x + 3$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 1}{2\sin x - 1} = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$.
- 14 В правильной шестиугольной пирамиде $SAB CDEF$ с вершиной S боковое ребро вдвое больше стороны основания.
- а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C , делит апофему грани ASB в отношении $2 : 1$, считая от вершины S .
- б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C , делит ребро SF , считая от вершины S .
- 15 Решите неравенство $4^{x-2} - 71 \cdot 2^{x-6} + 7 \leq 0$.
- 16 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
 - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
 - 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
- Известно, что за первые 12 месяцев нужно выплатить банку 177,75 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?
- 17 Отрезок, соединяющий середины M и N оснований BC и AD соответственно трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.
- а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.
- б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 8. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB , основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

- 18** Найдите все положительные значения a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \leq \frac{a + x^2 + 2 \log_5(a^2 - 4a + 5)}{30\sqrt{17x^4 + 5x^2} + a + 1 + \log_5^2(a^2 - 4a + 5)}$$

состоит из одной точки, найдите это решение.

- 19** Про три различных натуральных числа известно, что они являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

а) Могло ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{13}{7}$?

б) Могло ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{8}{7}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине из этих чисел равно 25?



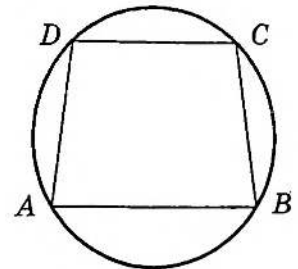
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ВАРИАНТ 36

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Основания равнобедренной трапеции равны 32 и 24. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит внутри трапеции, а радиус окружности равен 20. Найдите высоту трапеции.

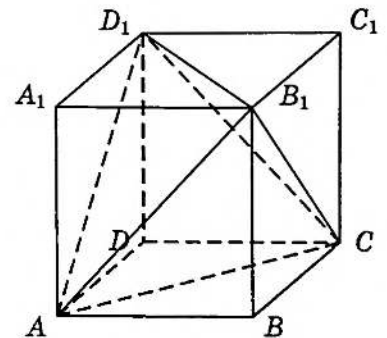


Ответ: _____.

- 2 Даны векторы $\vec{f}(9; -21)$ и $\vec{e}(-2; 15)$. Найдите координаты вектора $\vec{g} = \frac{1}{3}\vec{f} - 0,2\vec{e}$. В ответ запишите сумму координат вектора $\vec{g}$.

Ответ: _____.

- 3 Объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 3. Найдите объём треугольной пирамиды $AD_1 CB_1$.



Ответ: _____.

- 4 Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,03. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,97. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,02. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ: _____.

- 5 Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 6. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.

Ответ: _____.

- 6 Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin \frac{\pi x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

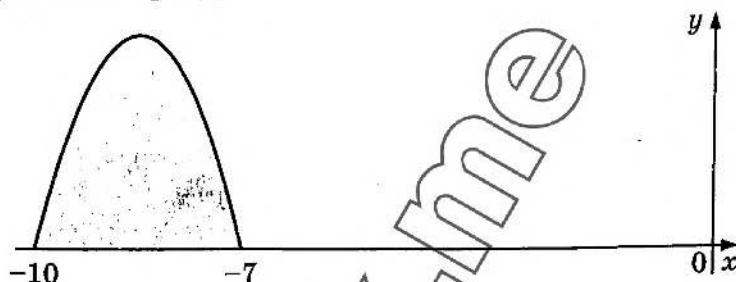
Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $\frac{(2^{\frac{3}{5}} \cdot 5^{\frac{2}{3}})^{16}}{10^9}$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = -\frac{4}{9}x^3 - \frac{34}{3}x^2 - \frac{280}{3}x - \frac{18}{5}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Ответ: _____.

- 9 Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{\text{п}} = 25^\circ\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0,5$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x , вода охлаждается от начальной температуры $T_{\text{в}} = 85^\circ\text{C}$ до температуры T , причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}}$, где

$c = 4200 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 21 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1,4$ —

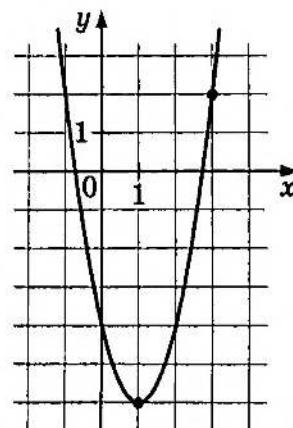
постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 140 м.

Ответ: _____.

- 10 Расстояние между городами А и В равно 500 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 2 часа следом за ним со скоростью 75 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите скорость автомобиля. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 - 4x + c$. Найдите $f(-3)$.



Ответ: _____.

- 12 В какой точке функция $y = \sqrt{x^2 + 10x + 55}$ принимает наименьшее значение?

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $(49^{\sin x})^{\cos x} = 7\sqrt{3}\sin x$.
б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.
- 14 В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . Точка K — середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.
а) Докажите, что KM перпендикулярно AC .
б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB = 8$, $AC = 12$ и $AA_1 = 5$.
- 15 Решите неравенство $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} > \sqrt{x-2}$.
- 16 У фермера есть два поля, каждое площадью 20 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 450 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором — 400 ц/га.
Фермер может продавать картофель по цене 2000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 2500 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?
- 17 Дан треугольник ABC . Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K , лежащей на стороне BC .
а) Докажите, что $AC^2 = BC \cdot CK$.
б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC , если $\sin B = 0,6$ и сторона $AC = 24$.

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\log_{a-3,5}(4x^2+9) = \log_{a-3,5}(4(a-3)x+8)$$

имеет ровно два различных корня.

- 19 Конечная последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$.

- а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 5$.
- б) Может ли в такой последовательности некоторое число встретиться три раза?
- в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из двузначных чисел?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

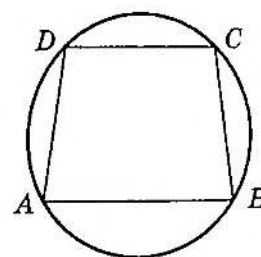
ВАРИАНТ 37

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Основания равнобедренной трапеции равны 48 и 20. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит внутри трапеции, а радиус окружности равен 26. Найдите высоту трапеции.

Ответ: _____.

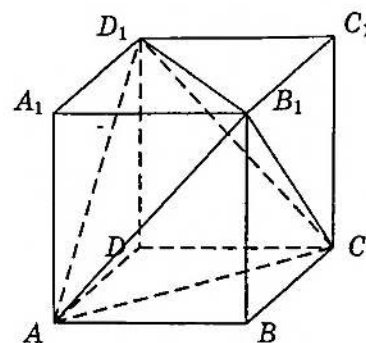


- 2 Даны векторы $\vec{f}(-\frac{1}{7}; -\frac{2}{3})$ и $\vec{e}(0,7; 2)$. Найдите координаты вектора $\vec{g} = -21\vec{f} - 6\vec{e}$.
В ответ запишите сумму координат вектора $\vec{g}$.

Ответ: _____.

- 3 Объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 6. Найдите объём треугольной пирамиды $AD_1 CB_1$.

Ответ: _____.



- 4 Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,97. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,02. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ: _____.

- 5 Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 7. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.

Ответ: _____.

- 6 Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin \frac{\pi x}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: _____.

7 Найдите значение выражения $\frac{(5^{\frac{4}{7}} \cdot 9^{\frac{2}{3}})^{21}}{45^{12}}$.

Ответ: _____.

8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = -\frac{1}{4}x^3 - 6x^2 - \frac{189}{4}x - 1$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Ответ: _____.

9 Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{\text{п}} = 25^\circ\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0,3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x , вода охлаждается от начальной температуры $T_{\text{в}} = 57^\circ\text{C}$ до температуры T , причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}}$, где

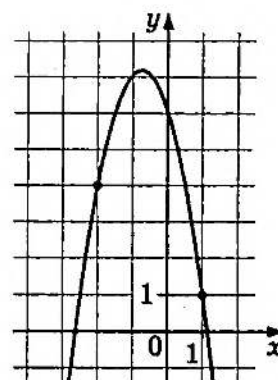
$c = 4200 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 63 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1,4$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 56 м.

Ответ: _____.

10 Расстояние между городами А и В равно 400 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через час следом за ним со скоростью 120 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите скорость автомобиля. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 - 3x + c$. Найдите $f(-4)$.



Ответ: _____.

12 В какой точке функция $y = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$ принимает наименьшее значение?

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $(81^{\sin x})^{\cos x} = 9^{\sqrt{2}\cos x}$.
- б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.
- 14 В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . Точка K — середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.
- а) Докажите, что KM перпендикулярно AC .
- б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB = 5$, $AC = 8$ и $AA_1 = 4$.
- 15 Решите неравенство $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-1} > \sqrt{x-2}$.
- 16 У фермера есть два поля, каждое площадью 15 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором — 450 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 200 ц/га.
- Фермер может продавать картофель по цене 1200 руб. за центнер, а свёклу — по цене 1400 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?
- 17 Дан треугольник ABC . Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K , лежащей на стороне BC .
- а) Докажите, что $AC^2 = BC \cdot CK$.
- б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC , если $\sin B = \frac{\sqrt{11}}{6}$ и сторона $AC = 45$.
- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение
- $$\log_{a+2,5}(x^2+4) = \log_{a+2,5}((a+4)x+3)$$
- имеет ровно два различных корня.
- 19 Конечная последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$.
- а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 3$.
- б) Может ли в такой последовательности оказаться так, что $a_3 = a_{11}$?
- в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чисел, не превосходящих 50?



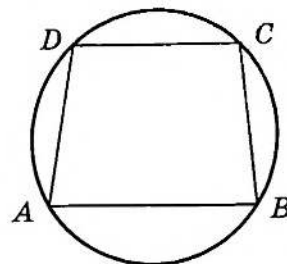
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ВАРИАНТ 38

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Основания равнобедренной трапеции равны 72 и 30. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит внутри трапеции, а радиус окружности равен 39. Найдите высоту трапеции.

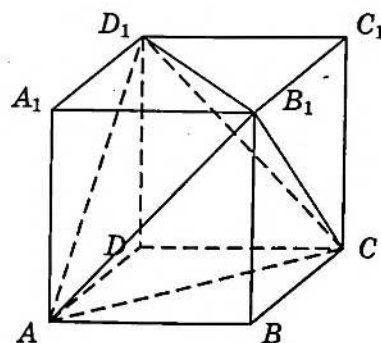


Ответ: _____.

- 2 Даны векторы $\vec{f}(-8; 7)$ и $\vec{e}(-1; -0,5)$. Найдите координаты вектора $\vec{g} = -5\vec{f} + 8\vec{e}$. В ответ запишите сумму координат вектора $\vec{g}$.

Ответ: _____.

- 3 Объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 21. Найдите объем треугольной пирамиды $AD_1 CB_1$.



Ответ: _____.

- 4 Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,04. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,95. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ: _____.

- 5 Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 8. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.

Ответ: _____.

- 6 Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin \frac{\pi x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

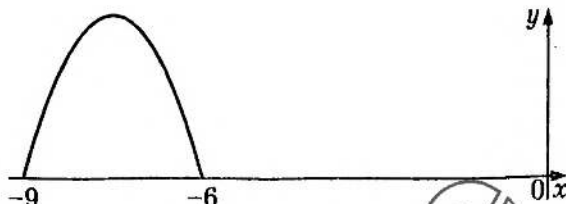
Ответ: _____.

7 Найдите значение выражения $\frac{(4^{\frac{4}{7}} \cdot 7^{\frac{2}{3}})^{21}}{28^{12}}$.

Ответ: _____.

8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = -\frac{10}{27}x^3 - \frac{25}{3}x^2 - 60x - \frac{5}{11}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Ответ: _____.

9 Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{\text{п}} = 25^\circ\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0,3 \text{ кг/с}$. Проходя по трубе расстояние x , вода охлаждается от начальной температуры $T_{\text{в}} = 49^\circ\text{C}$ до температуры T , причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}}$, где

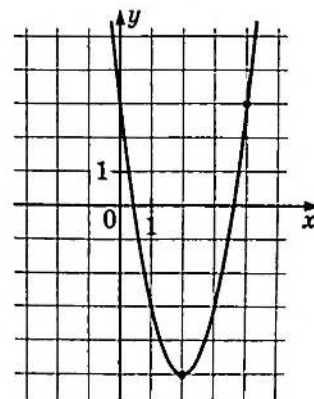
$c = 4200 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 21 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1,1$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 66 м.

Ответ: _____.

10 Расстояние между городами А и В равно 400 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 3 часа следом за ним со скоростью 110 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите скорость автомобиля. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

11 На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 - 8x + c$. Найдите $f(-2)$.



Ответ: _____.

12 В какой точке функция $y = \sqrt{x^2 - 18x + 100}$ принимает наименьшее значение?

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $(36^{\sin x})^{\cos x} = 6^{\sqrt{3}\cos x}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.

14 В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . Точка K — середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC .

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB = 10$, $AC = 12$ и $AA_1 = 7$.

15 Решите неравенство $\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-1} > \sqrt{x-1}$.

16 У фермера есть два поля, каждое площадью 15 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 150 ц/га, а на втором — 250 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 180 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 2000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 1800 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

17 Дан треугольник ABC . Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K , лежащей на стороне BC .

а) Докажите, что $AC^2 = BC \cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC , если $\sin B = \frac{\sqrt{5}}{3}$ и сторона $AC = 18$.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\log_{2,5-a}(x^2+2) = \log_{2,5-a}((a-4)x+1)$$

имеет ровно два различных корня.

19 Конечная последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 2$.

б) Может ли в такой последовательности оказаться так, что $a_6 = a_{18}$?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чисел, не превосходящих 100?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

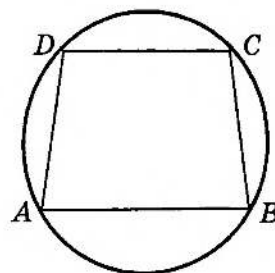
ВАРИАНТ 39

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Основания равнобедренной трапеции равны 96 и 28.

Центр окружности, описанной около трапеции, лежит внутри трапеции, а радиус окружности равен 50. Найдите высоту трапеции.

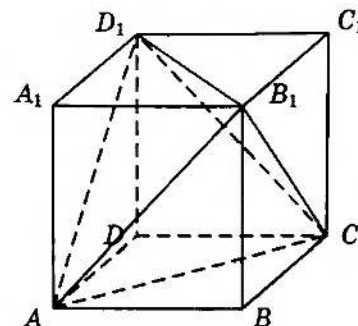


Ответ: _____.

- 2 Даны векторы $\vec{f}(-5; 7)$ и $\vec{e}(\frac{1}{3}; 2)$. Найдите координаты вектора $\vec{g} = -5\vec{f} + 6\vec{e}$. В ответ запишите сумму координат вектора $\vec{g}$.

Ответ: _____.

- 3 Объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 12. Найдите объём треугольной пирамиды $AD_1 CB_1$.



Ответ: _____.

- 4 Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,98. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ: _____.

- 5 Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 4. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска?

Ответ: _____.

- 6 Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin \frac{\pi x}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

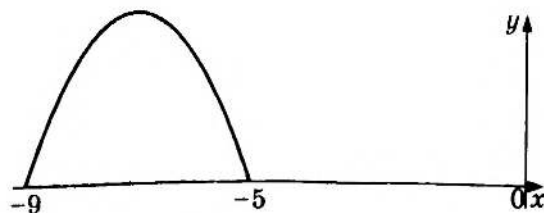
Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $\frac{\left(7^{\frac{3}{5}} \cdot 9^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{63^9}$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{21}{4}x^2 - \frac{135}{4}x - \frac{13}{2}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Ответ: _____.

- 9 Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{\Pi} = 15^\circ\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 1,4$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x , вода охлаждается от начальной температуры $T_{\text{В}} = 75^\circ\text{C}$ до температуры T , причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{В}} - T_{\Pi}}{T - T_{\Pi}}$, где

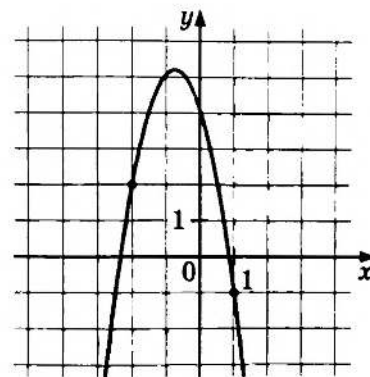
$c = 4200 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 63 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1,8$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 168 м.

Ответ: _____.

- 10 Расстояние между городами А и В равно 600 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 2 часа следом за ним со скоростью 90 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите скорость автомобиля. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 - 3x + c$. Найдите $f(5)$.



Ответ: _____.

- 12 В какой точке функция $y = \sqrt{x^2 - 22x + 122}$ принимает наименьшее значение?

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $(64^{\sin x})^{\cos x} = 8^{\sin x}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

14 В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . Точка K — середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC .

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB = 10$, $AC = 16$ и $AA_1 = 5$.

15 Решите неравенство $\sqrt{x+3} - \sqrt{3x-2} > \sqrt{x-2}$.

16 У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором — 200 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 1500 руб. за центнер, а свёклу — по цене 1800 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

17 Дан треугольник ABC . Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K , лежащей на стороне BC .

а) Докажите, что $AC^2 = BC \cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC , если $\sin B = \frac{\sqrt{7}}{4}$ и сторона $AC = 36$.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\log_{a-7,5}(x^2+3) = \log_{a-7,5}((a-6)x+2)$$

имеет ровно два различных корня.

19 Конечная последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 1$.

б) Может ли в такой последовательности оказаться так, что $a_8 = a_{16}$?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чисел, не превосходящих 75?



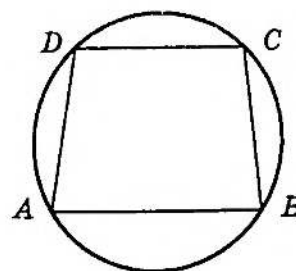
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ВАРИАНТ 40

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Основания равнобедренной трапеции равны 120 и 50. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит внутри трапеции, а радиус окружности равен 65. Найдите высоту трапеции.

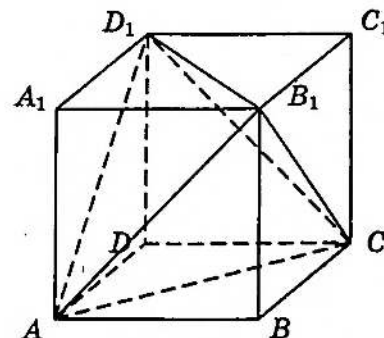


Ответ: _____.

- 2 Даны векторы $\vec{f}(-2, 5; 0, 5)$ и $\vec{e}(14; -12)$. Найдите координаты вектора $\vec{g} = 6\vec{f} + 2,5\vec{e}$. В ответ запишите сумму координат вектора $\vec{g}$.

Ответ: _____.

- 3 Объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 27. Найдите объем треугольной пирамиды $AD_1 CB_1$.



Ответ: _____.

- 4 Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,05. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,03. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ: _____.

- 5 Игральную кость бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 5. Какова вероятность того, что для этого потребовалось два броска? Ответ округлите до сотых.

Ответ: _____.

- 6 Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin \frac{\pi x}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

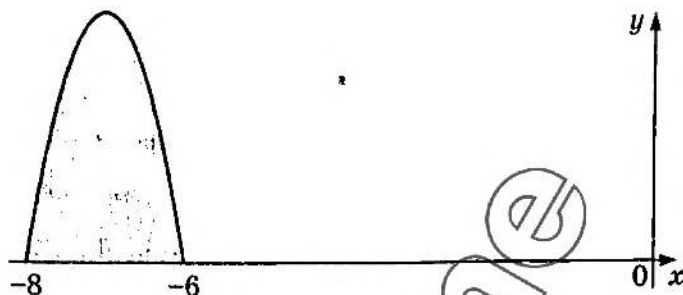
Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $\frac{\left(4^{\frac{4}{7}} \cdot 11^{\frac{2}{3}}\right)^{21}}{44^{12}}$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = -x^3 - 21x^2 - 144x - \frac{11}{4}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Ответ: _____.

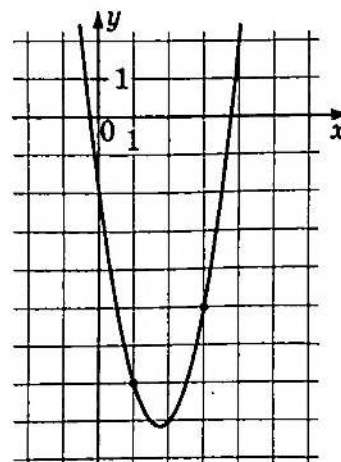
- 9 Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{\Pi} = 20^\circ\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0,2$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x , вода охлаждается от начальной температуры $T_{\text{В}} = 68^\circ\text{C}$ до температуры T , причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{В}} - T_{\Pi}}{T - T_{\Pi}}$, где $c = 4200 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 21 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1,7$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 136 м.

Ответ: _____.

- 10 Расстояние между городами А и В равно 240 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 2 часа следом за ним со скоростью 80 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите скорость автомобиля. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 - 7x + c$. Найдите $f(7)$.



Ответ: _____.

- 12 В какой точке функция $y = \sqrt{x^2 + 30x + 248}$ принимает наименьшее значение?

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $49^{\cos^2 x} = 7^{\sqrt{2} \cos x}$.
б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.
- 14 В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . Точка K — середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.
а) Докажите, что KM перпендикулярно AC .
б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB = 14$, $AC = 16$ и $AA_1 = 6$.
- 15 Решите неравенство $\sqrt{x+5} - \sqrt{2x-3} > \sqrt{x-3}$.
- 16 У фермера есть два поля, каждое площадью 20 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 230 ц/га, а на втором — 150 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором — 300 ц/га.
Фермер может продавать картофель по цене 1800 руб. за центнер, а свёклу — по цене 1600 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?
- 17 Дан треугольник ABC . Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K , лежащей на стороне BC .
а) Докажите, что $AC^2 = BC \cdot CK$.
б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC , если $\sin B = 0,8$ и сторона $AC = 30$.

- 18** Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\log_{6,5-a}(x^2+3) = \log_{6,5-a}((a-8)x+2)$$

имеет ровно два различных корня.

- 19** Конечная последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$.

- а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 1$.
б) Может ли в такой последовательности оказаться так, что $a_9 = a_{27}$?
в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чисел, не превосходящих 150?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ВАРИАНТ 41

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 9$, $\operatorname{tg} A = \frac{5}{\sqrt{20}}$. Найдите AC .

Ответ: _____.

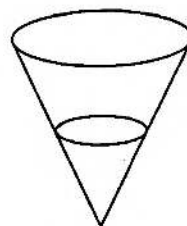
- 2 Сторона равностороннего треугольника ABC равна $6\sqrt{3}$. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Ответ: _____.

- 3 В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$ высоты. Объём жидкости равен 54 мл.

Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?

Ответ: _____.



- 4 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что разница выпавших очков равна 1 или 2.

Ответ: _____.

- 5 При двукратном бросании игральной кости в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность того, что хотя бы раз выпало 3 очка?

Ответ: _____.

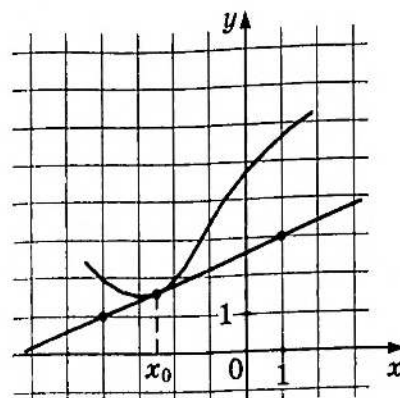
- 6 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2x} = 4^{2x}$.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $(252^2 - 23^2) : 275$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

- 9 Наблюдатель, находящийся на высоте h м над поверхностью земли, видит линию горизонта на расстоянии l км, которое можно найти по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли.

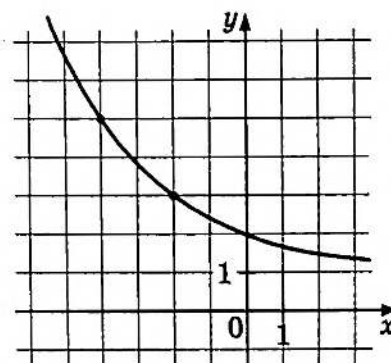
Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 километра. К пляжу ведёт лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 10 см. На сколько ступенек ему нужно подняться, чтобы он увидел горизонт на расстоянии 6,4 километра?

Ответ: _____.

- 10 Если смешать 45-процентный раствор кислоты и 97-процентный раствор этой же кислоты и добавить 10 кг чистой воды, получится 62-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 72-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 45-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите $f(-10)$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 144}$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\cos x + \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} \cdot (\sin x + 1) = 0$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi\right]$.

14 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 3 : 1$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 1 : 3$, а на ребре $B_1 C_1$ — точка T так, что $B_1 T : TC_1 = 1 : 2$. Известно, что $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $BB_1 C_1$.

15 Решите неравенство $\sqrt[5]{32^{4x-3}} < \sqrt{16^{\frac{2x+1}{x}}}$.

16 15 января планируется взять кредит в банке на 5 месяцев. Условия его возврата таковы:
 — 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 5 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
 — со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
 — 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
 Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

17 Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC , перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K . При этом $AK : KC = 1 : 2$.

а) Докажите, что $\angle BAC = 30^\circ$.

б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P , а прямые AP и BK — в точке Q .

Найдите KQ , если $BC = 3\sqrt{2}$.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(x^2 + x + 2a^2 + 1)^2 = 8a^2(x^2 + x + 1)$$

имеет ровно один корень.

19 Конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n - 2$ выполнено равенство $5a_{k+2} = 6a_{k+1} - a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geq 3$ выполняться равенство $4a_n = 5a_2 - a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1 , если $a_n = 286$?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ВАРИАНТ 42

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

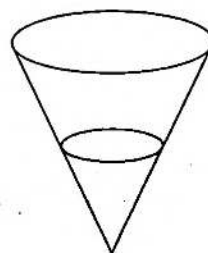
- 1 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 8$, $\operatorname{tg} A = \frac{3}{\sqrt{3}}$. Найдите AC .

Ответ: _____.

- 2 Сторона равностороннего треугольника ABC равна $4\sqrt{3}$. Найдите длину разности векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CA}$.

Ответ: _____.

- 3 В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{4}$ высоты. Объём жидкости равен 5 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Ответ: _____.

- 4 В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 9. Результат округлите до тысячных.

Ответ: _____.

- 5 При двукратном бросании игральной кости в сумме выпало 5 очков. Какова вероятность того, что хотя бы раз выпало 1 очко?

Ответ: _____.

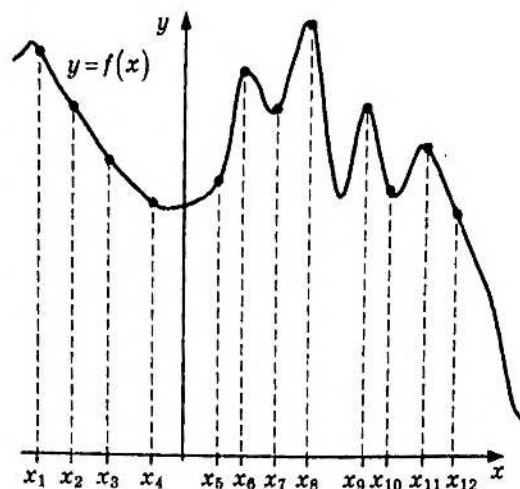
- 6 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{18-3x} = 64^x$.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $(168^2 - 11^2) : 179$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



Ответ: _____.

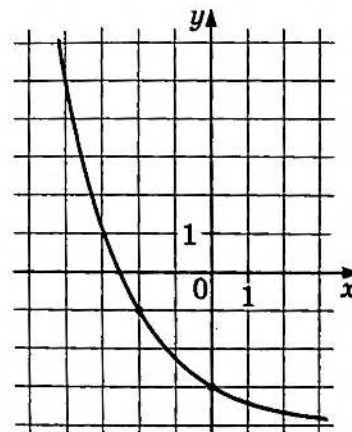
- 9 Наблюдатель, находящийся на высоте h м над поверхностью земли, видит линию горизонта на расстоянии l км, которое можно найти по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли.
Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 километра. К пляжу ведёт лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На сколько ступенек ему нужно подняться, чтобы он увидел горизонт на расстоянии 8 километров?

Ответ: _____.

- 10 Если смешать 54-процентный раствор кислоты и 61-процентный раствор этой же кислоты и добавить 10 кг чистой воды, получится 46-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 56-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 54-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = a^x + b$.
Найдите $f(-8)$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 196}$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\cos x = \sqrt{\frac{1 + \sin x}{2}}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

14 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 3 : 2$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 2 : 3$, а на ребре $B_1 C_1$ — точка T так, что $B_1 T : TC_1 = 2 : 1$. Известно, что $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 5$.

- а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $BB_1 C_1$.

15 Решите неравенство $\sqrt[3]{8^{5x+3}} < \sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{2x+1}{x}}}$.

16 15 января планируется взять кредит в банке на 7 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

17 Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC , перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K . При этом $AK : KC = 1 : 2$.
а) Докажите, что $\angle BAC = 30^\circ$.
б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P , а прямые AP и BK — в точке Q . Найдите KQ , если $BC = 4\sqrt{6}$.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(2x^2 + x + 3a^2 + 5)^2 = 12a^2(2x^2 + x + 5)$$

имеет ровно один корень.

19 Конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n - 2$ выполнено равенство $2a_{k+2} = 3a_{k+1} - a_k$.

- а) Приведите пример такой последовательности при $n = 6$.
б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geq 3$ выполняться равенство $a_n = 2a_2 - a_1$?
в) Какое наименьшее значение может принимать a_1 , если $a_n = 286$?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ВАРИАНТ 43

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

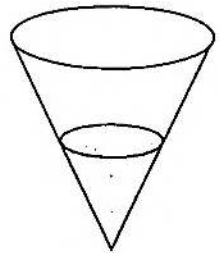
- 1 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 15$, $\operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$. Найдите AC .

Ответ: _____.

- 2 В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известно, что $AB = \sqrt{149}$, $AC = 10$. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Ответ: _____.

- 3 В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{3}$ высоты. Объём жидкости равен 4 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Ответ: _____.

- 4 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что одновременно хотя бы на одном кубике выпало число 1 и ни на одном кубике не выпало число 6.

Ответ: _____.

- 5 При двукратном бросании игральной кости в сумме выпало 8 очков. Какова вероятность того, что хотя бы раз выпало 6 очков?

Ответ: _____.

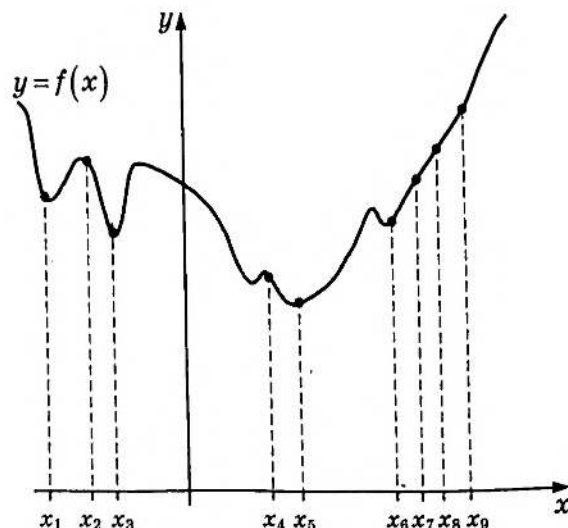
- 6 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} = 9^x$.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $(246^2 - 17^2) : 263$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и девять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



Ответ: _____.

- 9 Наблюдатель, находящийся на высоте h м над поверхностью земли, видит линию горизонта на расстоянии l км, которое можно найти по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли.

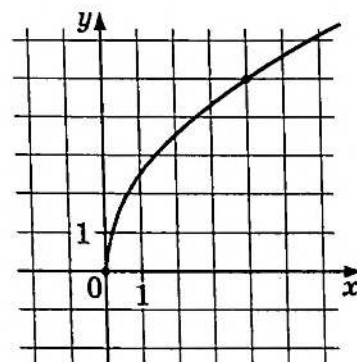
Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 километра. К пляжу ведёт лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На сколько ступенек ему нужно подняться, чтобы он увидел горизонт на расстоянии 6,4 километра?

Ответ: _____.

- 10 Если смешать 29-процентный раствор кислоты и 33-процентный раствор этой же кислоты и добавить 10 кг чистой воды, получится 19-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 39-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 29-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(6,76)$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 121}$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $\sin x + \sqrt{\frac{3}{2}(1 - \cos x)} = 0$.
- б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{13\pi}{2}; -5\pi\right]$.
- 14 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 2 : 1$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 1 : 5$, а на ребре $B_1 C_1$ — точка T так, что $B_1 T : TC_1 = 1 : 3$. Известно, что $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 6$.
- а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
- б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $BB_1 C_1$.
- 15 Решите неравенство $\sqrt[3]{27^{2x-3}} > \sqrt{81^{\frac{6-4x}{x+1}}}$.
- 16 15 января планируется взять кредит в банке на 8 месяцев. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
 - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
 - 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
- Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?
- 17 Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC , перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K . При этом $AK : KC = 1 : 2$.
- а) Докажите, что $\angle BAC = 30^\circ$.
- б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P , а прямые AP и BK — в точке Q . Найдите KQ , если $BC = 8\sqrt{3}$.
- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение
- $$(6x^2 - 6x + a^2 + 6)^2 = 24a^2(x^2 - x + 1)$$
- имеет ровно один корень.
- 19 Конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n - 2$ выполнено равенство $4a_{k+2} = 5a_{k+1} - a_k$.
- а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$.
- б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geq 3$ выполняться равенство $3a_n = 4a_2 - a_1$?
- в) Какое наименьшее значение может принимать a_1 , если $a_n = 283$?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ВАРИАНТ 44

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

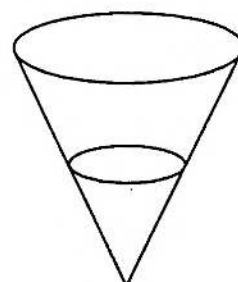
- 1 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 12$, $\operatorname{tg} A = \frac{5}{\sqrt{20}}$. Найдите AC .

Ответ: _____.

- 2 В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известно, что $AC = \sqrt{133}$, $CB = 6$. Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

Ответ: _____.

- 3 В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{2}{3}$ высоты. Объём жидкости равен 152 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Ответ: _____.

- 4 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что произведение выпавших очков делится на 5, но не делится на 30.

Ответ: _____.

- 5 При двукратном бросании игровой кости в сумме выпало 8 очков. Какова вероятность того, что хотя бы раз выпало 4 очка?

Ответ: _____.

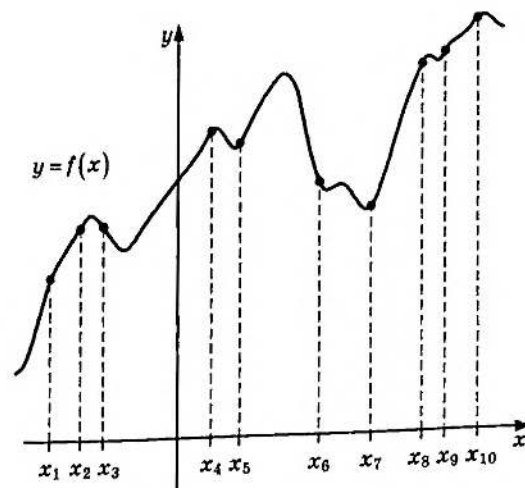
- 6 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{13-5x} = 16^{3x}$.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $(651^2 - 17^2) : 668$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



Ответ: _____.

- 9 Наблюдатель, находящийся на высоте h м над поверхностью земли, видит линию горизонта на расстоянии l км, которое можно найти по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли.

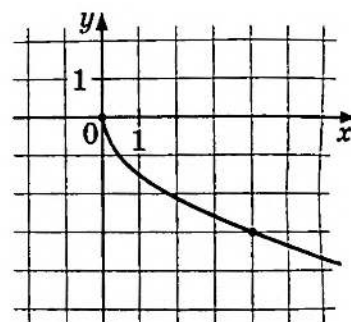
Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 6,4 километра. К пляжу ведёт лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На сколько ступенек ему нужно подняться, чтобы он увидел горизонт на расстоянии 11,2 километра?

Ответ: _____.

- 10 Если смешать 40-процентный раствор кислоты и 90-процентный раствор этой же кислоты и добавить 10 кг чистой воды, получится 62-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 72-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 40-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(2,56)$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 625}$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\sin x = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

14 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 4 : 3$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 2 : 5$. Точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 7$.

- а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $BB_1 C_1$.

15 Решите неравенство $\sqrt[6]{64^{3x-1}} > \sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1-3x}{x-1}}}$.

16 15 января планируется взять кредит в банке на 8 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

17 Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC , перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K . При этом $AK : KC = 1 : 2$.

- а) Докажите, что $\angle BAC = 30^\circ$.
б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P , а прямые AP и BK — в точке Q .
Найдите KQ , если $BC = 6\sqrt{7}$.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(3x^2 - 3x + a^2 + 9)^2 = 12a^2(x^2 - x + 3)$$

имеет ровно один корень.

19 Конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n - 2$ выполнено равенство $6a_{k+2} = 7a_{k+1} - a_k$.

- а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$.
б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geq 3$ выполняться равенство $5a_n = 6a_2 - a_1$?
в) Какое наименьшее значение может принимать a_1 , если $a_n = 404$?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ВАРИАНТ 45

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

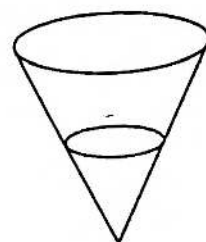
- 1 В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 14$, $\operatorname{tg} A = \frac{20}{3\sqrt{10}}$. Найдите AC .

Ответ: _____.

- 2 В треугольнике ABC известно, что стороны AB и BC равны 11, а угол BAC равен 30° . Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Ответ: _____.

- 3 В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{2}{3}$ высоты. Объём жидкости равен 192 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Ответ: _____.

- 4 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 7. Результат округлите до тысячных.

Ответ: _____.

- 5 Игральную кость бросили два раза. Известно, что два очка не выпали ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков окажется равна 4».

Ответ: _____.

- 6 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{6}\right)^{15-x} = 36^x$.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $(573^2 - 11^2) : 584$.

Ответ: _____.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13** а) Решите уравнение $\sin x + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \cdot (\cos x + 1) = 0$.
 б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.
- 14** На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 4 : 1$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 3 : 2$, а на ребре $B_1 C_1$ — точка T так, что $B_1 T : TC_1 = 3 : 1$. Известно, что $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 5$.
 а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
 б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $BB_1 C_1$.
- 15** Решите неравенство $\sqrt[4]{625^{\frac{4-2x}{x-1}}} > \sqrt[3]{125^{2x+1}}$.
- 16** 15 января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:
 — 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
 — со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
 — 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
 Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?
- 17** Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC , перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K . При этом $AK : KC = 1 : 2$.
 а) Докажите, что $\angle BAC = 30^\circ$.
 б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P , а прямые AP и BK — в точке Q . Найдите KQ , если $BC = 3\sqrt{14}$.
- 18** Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(2x^2 - 2x + 3a^2 + 2)^2 = 24a^2(x^2 - x + 1)$$

 имеет ровно один корень.
- 19** Конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n - 2$ выполнено равенство $7a_{k+2} = 8a_{k+1} - a_k$.
 а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$.
 б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geq 3$ выполняться равенство $6a_n = 7a_2 - a_1$?
 в) Какое наименьшее значение может принимать a_1 , если $a_n = 190$?



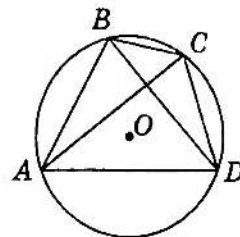
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ВАРИАНТ 46

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 132° , угол ABD равен 61° . Найдите угол CAD . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

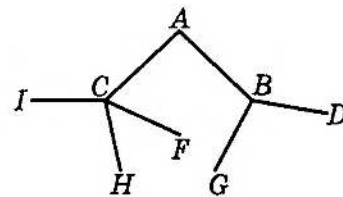
- 2 Сторона равностороннего треугольника ABC равна $6\sqrt{3}$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Ответ: _____.

- 3 Бетонный шар весит 0,5 т. Сколько тонн будет весить шар вдвое большего радиуса, сделанный из такого же бетона?

Ответ: _____.

- 4 Павел Иванович совершает прогулку из точки A по дорожкам парка. На каждой развилке он наудачу выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Схема дорожек показана на рисунке. Найдите вероятность того, что Павел Иванович попадёт в точку G .



Ответ: _____.

- 5 Первый член последовательности целых чисел равен 0. Каждый следующий член последовательности с вероятностью $p = \frac{10}{19}$ на единицу больше предыдущего и с вероятностью $1 - p$ на единицу меньше предыдущего. Какова вероятность того, что какой-то член этой последовательности окажется равен -1 ?

Ответ: _____.

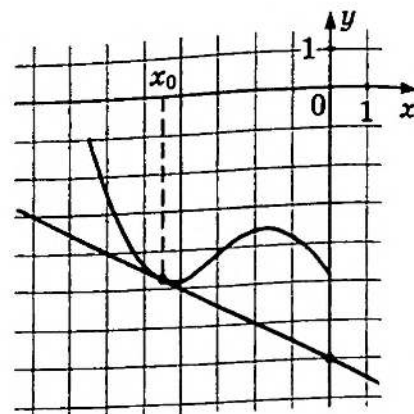
- 6 Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{5}}(5 - x) = -2$.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $\frac{60}{6^{\log_6 5}}$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

- 9 Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. При каком значении температуры нагревателя T_1 (в кельвинах) КПД этого двигателя будет 80 %, если температура холодильника $T_2 = 200$ К?

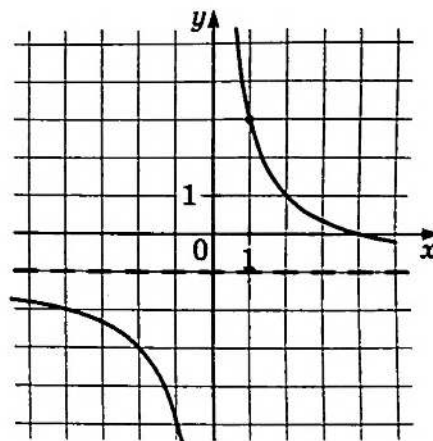
Ответ: _____.

- 10 Толстовка дороже футболки на 19 % и дешевле, чем кеды, на 30 %. На сколько процентов кеды дороже футболки?

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$.

Найдите $f\left(\frac{1}{3}\right)$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите наибольшее значение функции $y = 13x - 13 \operatorname{tg} x - 18$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $5 \cdot 4^{x^2+4x} + 20 \cdot 10^{x^2+4x-1} - 7 \cdot 25^{x^2+4x} = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3; 1]$.
- 14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 7\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 8$.
а) Докажите, что плоскость BCA_1 перпендикулярна плоскости, проходящей через ребро AA_1 и середину ребра B_1C_1 .
б) Найдите тангенс угла между плоскостями BCA_1 и BB_1C_1 .
- 15 Решите неравенство $x + \frac{20}{x+6} \geq 6$.
- 16 В двух областях есть по 50 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.
Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 2 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?
- 17 На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB .
а) Докажите, что $CM = \frac{1}{2}DK$.
б) Найдите расстояния от точки M до центров квадратов, если $AC = 14$, $BC = 16$ и $\angle ACB = 150^\circ$.
- 18 Найдите все значения k , при каждом из которых уравнение $\frac{6k - (2 - 3k)\cos t}{\sin t - \cos t} = 2$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- 19 Три различных натуральных числа являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.
а) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{3}{2}$?
б) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{5}{4}$?
в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине число равно 18?



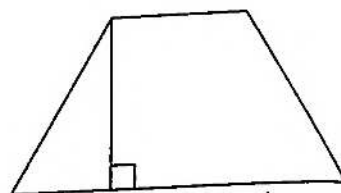
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ВАРИАНТ 47

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Основания равнобедренной трапеции равны 49 и 23. Тангенс острого угла равен $\frac{9}{13}$. Найдите высоту трапеции.

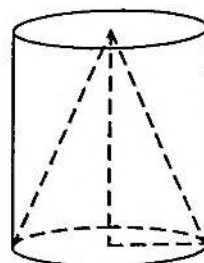


Ответ: _____.

- 2 Сторона равностороннего треугольника ABC равна $6\sqrt{3}$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$.

Ответ: _____.

- 3 Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём конуса равен 21. Найдите объём цилиндра.



Ответ: _____.

- 4 Из множества натуральных чисел от 61 до 76 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 4?

Ответ: _____.

- 5 Маша коллекционирует принцесс из Киндер-сюрпризов. Всего в коллекции 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном Киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс. У Маши уже есть шесть разных принцесс из коллекции. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы Маше придётся купить ещё 1 или 2 шоколадных яйца?

Ответ: _____.

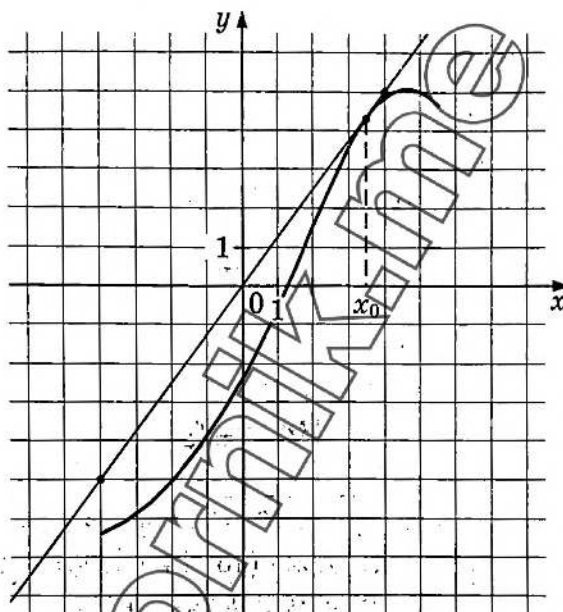
6 Найдите корень уравнения $\log_3(7 + 2x) = \log_3(3 - 2x) + 2$.

Ответ: _____.

7 Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{19}}{10}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: _____.

8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

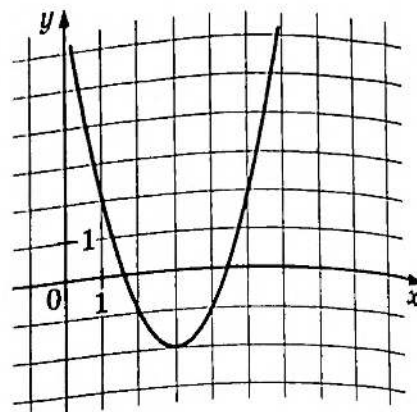
9 В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1 = 112$ Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление задаётся формулой $R_{\text{общ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 48 Ом. Ответ дайте в омах.

Ответ: _____.

10 Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 28 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолёте со скоростью 462 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a , b и c — целые. Найдите значение $f(10)$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите точку максимума функции $y = 5 + 49x - \frac{x^3}{3}$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $\left(\frac{16}{9}\right)^{\cos x} + 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\cos x} - 4 = 0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; 5\pi]$.
- 14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 10, боковые рёбра равны 12.
а) Докажите, что сечение, проходящее через вершины A , B и середину ребра A_1C_1 , является равнобедренной трапецией.
б) Найдите площадь данного сечения.
- 15 Решите неравенство $\log_3 \frac{1}{x} + \log_3 (x^2 + 3x - 9) \leq \log_3 \left(x^2 + 3x + \frac{1}{x} - 10\right)$.
- 16 Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 3x^2 + x + 6$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через 11 лет суммарная прибыль может составить не менее 66 млн рублей при некотором значении x ?

- 17 Биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC пересекаются в точке D . Центр окружности, вписанной в треугольник BCD , лежит на окружности, описанной около треугольника ABC .
- а) Докажите, что $\angle BAC = 60^\circ$.
- б) Найдите синус угла между прямыми AD и BC , если $AB = 3$ и $AC = 8$.

- 18 Найдите все значения a , при которых уравнение

$$(3a - 1)x^2 - 2axy + (3a - 1)y^2 + (x + 1)|y| - (y + 1)|x| = 0$$

имеет хотя бы одно ненулевое решение, и для любого его решения $x = \alpha$, $y = \beta$ верно, что и $x = \beta$, $y = \alpha$ — тоже решение.

- 19 а) Можно ли в выражении $\ln 5 * \ln 6 * \ln 7 * \ln 8 * \ln 10 * \ln 12 * \ln 14$ вместо всех знаков $*$ так расставить знаки $+$ или $-$, чтобы в результате получился нуль?
- б) Можно ли в выражении $\ln 6 * \ln 7 * \ln 8 * \ln 12 * \ln 14 * \ln 24 * \ln 32$ вместо всех знаков $*$ так расставить знаки $+$ или $-$, чтобы в результате получился нуль?
- в) Какое наибольшее количество попарно различных чисел можно выбрать из набора $\ln 7, \ln 8, \dots, \ln 20$ и расставить перед ними знаки $+$ или $-$ так, чтобы их сумма стала равна нулю?



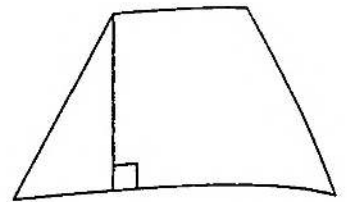
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ВАРИАНТ 48

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Основания равнобедренной трапеции равны 78 и 60. Тангенс острого угла равен $\frac{2}{9}$. Найдите высоту трапеции.

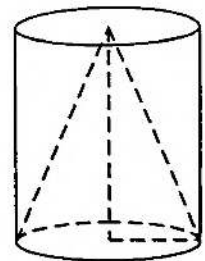


Ответ: _____.

- 2 В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известно, что $AB = 8\sqrt{2}$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Ответ: _____.

- 3 Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём конуса равен 19. Найдите объём цилиндра.



Ответ: _____.

- 4 Из множества натуральных чисел от 43 до 67 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 3?

Ответ: _____.

- 5 Маша коллекционирует принцесс из Киндер-сюрпризов. Всего в коллекции 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном Киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс.

У Маши уже есть семь разных принцесс из коллекции. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы Маше придётся купить ещё 1 или 2 шоколадных яйца?

Ответ: _____.

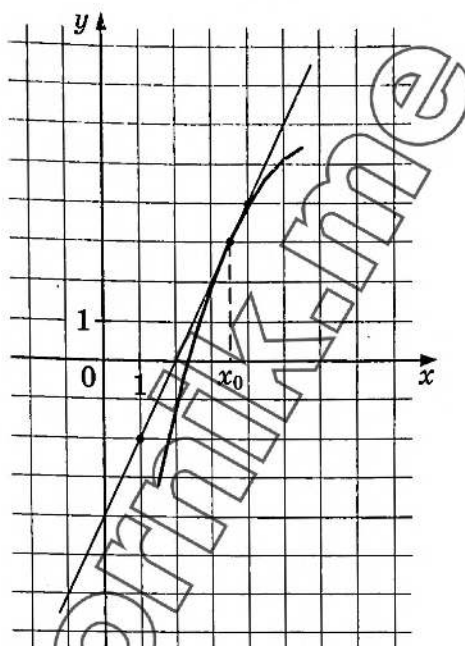
6 Найдите корень уравнения $\log_4(6+7x) = \log_4(1+3x) + 1$.

Ответ: _____.

7 Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{11}}{10}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: _____.

8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

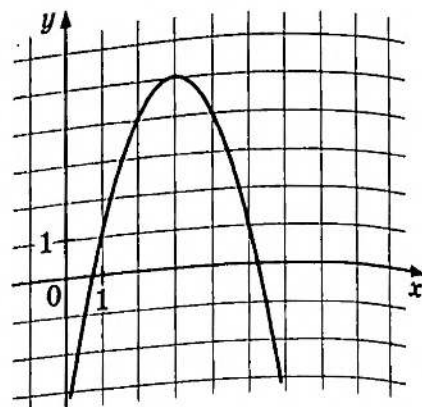
9 В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1 = 28$ Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление задаётся формулой $R_{\text{общ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 20 Ом. Ответ дайте в омах.

Ответ: _____.

10 Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 27 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолёте со скоростью 378 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a , b и c — целые. Найдите значение $f(-4)$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите точку максимума функции $y = 14 + x - \frac{x^3}{3}$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $\left(\frac{36}{49}\right)^{\sin x} + 4 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{\sin x} - 5 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

- 14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 12, боковые рёбра равны 8.

а) Докажите, что сечение, проходящее через вершины A , B и середину ребра A_1C_1 , является равнобедренной трапецией.
б) Найдите площадь данного сечения.

- 15 Решите неравенство $2^x + 3 \cdot 2^{-x} \leq 4$.

- 16 Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 0,5x^2 + 3x + 8$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px' - q$. При каком наименьшем значении p через два года суммарная прибыль может составить не менее 48 млн рублей при некотором значении x ?

- 17 Биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC пересекаются в точке D . Центр окружности, вписанной в треугольник BCD , лежит на окружности, описанной около треугольника ABC .
- а) Докажите, что $\angle BAC = 60^\circ$.
- б) Найдите синус угла между прямыми AD и BC , если $AB = 7$ и $AC = 15$.

- 18 Найдите все значения a , при которых уравнение

$$(2a+1)x^2 - 2axy + (2a+1)y^2 + (2x+1)|y| - (2y+1)|x| = 0$$

имеет хотя бы одно ненулевое решение, и для любого его решения $x = \alpha$, $y = \beta$ верно, что и $x = \beta$, $y = \alpha$ — тоже решение.

- 19 а) Можно ли в выражении $\ln 7 * \ln 9 * \ln 10 * \ln 12 * \ln 18 * \ln 20 * \ln 21$ вместо всех знаков $*$ так расставить знаки $+$ или $-$, чтобы в результате получился нуль?
- б) Можно ли в выражении $\ln 3 * \ln 6 * \ln 7 * \ln 8 * \ln 9 * \ln 16 * \ln 21$ вместо всех знаков $*$ так расставить знаки $+$ или $-$, чтобы в результате получился нуль?
- в) Какое наибольшее количество попарно различных чисел можно выбрать из набора $\ln 5, \ln 6, \dots, \ln 15$ и расставить перед ними знаки $+$ или $-$ так, чтобы их сумма стала равна нулю?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

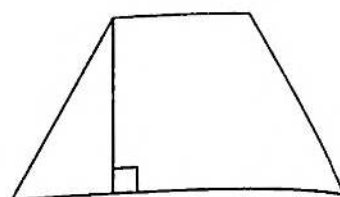
ВАРИАНТ 49

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Основания равнобедренной трапеции равны 78 и 50. Тангенс острого угла равен $\frac{11}{14}$. Найдите высоту трапеции.

Ответ: _____.

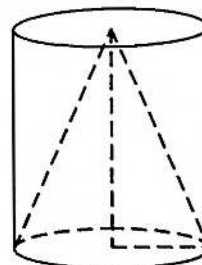


- 2 В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известно, что $AB = 8\sqrt{2}$. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CA}$.

Ответ: _____.

- 3 Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём конуса равен 16. Найдите объём цилиндра.

Ответ: _____.



- 4 Из множества натуральных чисел от 62 до 79 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 2?

Ответ: _____.

- 5 Маша коллекционирует принцесс из Киндер-сюрпризов. Всего в коллекции 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном Киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс. У Маши уже есть восемь разных принцесс из коллекции. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы Маше придётся купить ещё 1 или 2 шоколадных яйца?

Ответ: _____.

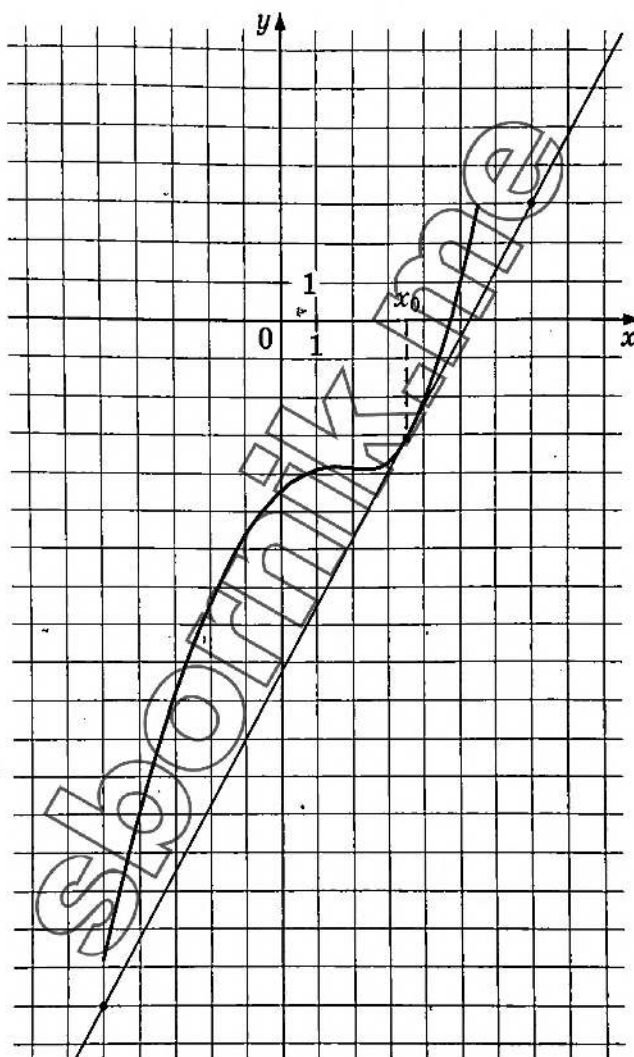
6 Найдите корень уравнения $\log_3(3+2x) = \log_3(1-2x) + 1$.

Ответ: _____.

7 Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Ответ: _____.

8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



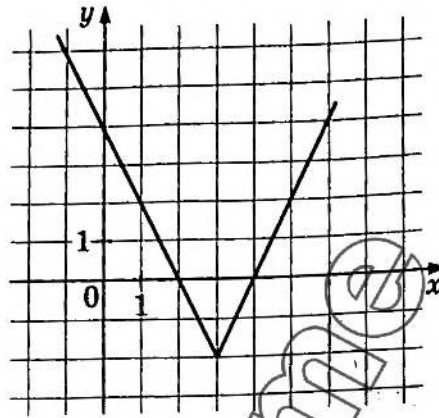
Ответ: _____.

9 В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1 = 54$ Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление задаётся формулой $R_{\text{общ}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 36 Ом. Ответ дайте в омах.

Ответ: _____.

- 10 Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 30 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолёте со скоростью 330 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.
- Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = |kx + b| + c$, где числа k , b и c — целые, $k > 0$. Найдите значение $f(-15, 7)$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите точку максимума функции $y = 14 + 16x - \frac{x^3}{3}$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $\left(\frac{16}{49}\right)^{\lg x} + 5 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{\lg x} - 6 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}\right]$.

- 14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 16, боковые рёбра равны 6.
- а) Докажите, что сечение, проходящее через вершины A , B и середину ребра A_1C_1 , является равнобедренной трапецией.
- б) Найдите площадь данного сечения.

15 Решите неравенство $\frac{3}{(2^2 - x^2 - 1)^2} - \frac{4}{2^2 - x^2 - 1} + 1 \geq 0$.

16 Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 2x^2 + 4x + 7$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через шесть лет суммарная прибыль может составить не менее 150 млн рублей при некотором значении x ?

17 Биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC пересекаются в точке D . Центр окружности, вписанной в треугольник BCD , лежит на окружности, описанной около треугольника ABC .

а) Докажите, что $\angle BAC = 60^\circ$.

б) Найдите синус угла между прямыми AD и BC , если $AB = 10$ и $AC = 16$.

18 Найдите все значения a , при которых уравнение

$$(2a - 1)x^2 - 2axy + (2a - 1)y^2 + \left(\frac{3}{2}x + 1\right)|y| - \left(\frac{3}{2}y + 1\right)|x| = 0$$

имеет хотя бы одно ненулевое решение, и для любого его решения $x = \alpha$, $y = \beta$ верно, что и $x = \beta$, $y = \alpha$ — тоже решение.

19 а) Можно ли в выражении $\ln 8 * \ln 9 * \ln 10 * \ln 11 * \ln 18 * \ln 20 * \ln 22$ вместо всех знаков $*$ так расставить знаки $+$ или $-$, чтобы в результате получился нуль?

б) Можно ли в выражении $\ln 7 * \ln 8 * \ln 16 * \ln 24 * \ln 28 * \ln 32 * \ln 56$ вместо всех знаков $*$ так расставить знаки $+$ или $-$, чтобы в результате получился нуль?

в) Какое наибольшее количество попарно различных чисел можно выбрать из набора $\ln 9, \ln 10, \dots, \ln 20$ и расставить перед ними знаки $+$ или $-$ так, чтобы их сумма стала равна нулю?



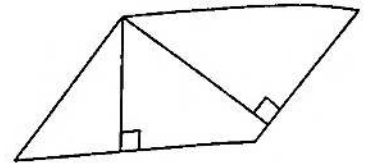
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

ВАРИАНТ 50

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1 Стороны параллелограмма равны 24 и 48. Высота, опущенная на меньшую из этих сторон, равна 36. Найдите высоту, опущенную на большую сторону параллелограмма.

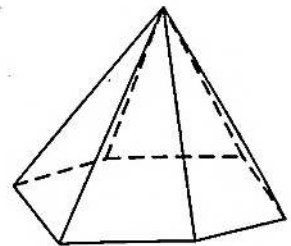


Ответ: _____.

- 2 Даны точки $A(5; 4)$ и $B(6; 3)$. Найдите скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CB}$, если $BC = 9$, $\angle CBA = 135^\circ$.

Ответ: _____.

- 3 Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 90, боковые рёбра равны 205. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.



Ответ: _____.

- 4 В группе туристов 25 человек. Их вертолётom доставляют в труднодоступный район, перевозя по 5 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист Ф. полетит вторым рейсом вертолётa.

Ответ: _____.

- 5 В коробке 11 синих, 6 красных и 8 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

Ответ: _____.

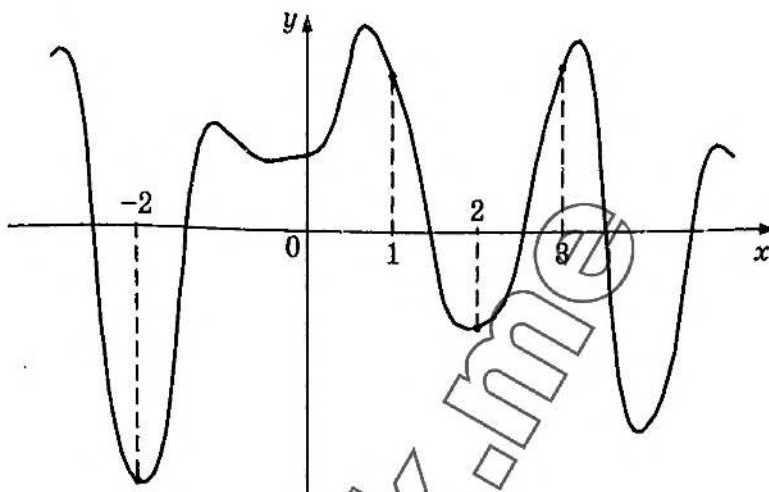
- 6 Решите уравнение $\operatorname{tg} \frac{\pi(x-7)}{3} = -\sqrt{3}$. В ответе запишите наименьший положительный корень.

Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения $\left(\frac{4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{4}} \right)^3$.

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-2, 1, 2, 3$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



Ответ: _____.

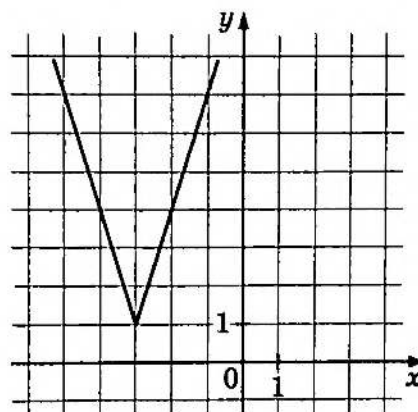
- 9 Груз массой $0,25$ кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v = v_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 6$ с — период колебаний, $v_0 = 0,8$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 5 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Ответ: _____.

- 10 Первый велосипедист выехал из посёлка по шоссе со скоростью 13 км/ч. Через час после него со скоростью 10 км/ч из того же посёлка в том же направлении выехал второй велосипедист, а ещё через час после этого — третий. Найдите скорость третьего велосипедиста, если сначала он догнал второго, а через 1 час 30 минут после этого догнал первого. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.

- 11 На рисунке изображён график функции $f(x) = |kx + b| + c$, где числа k, b и c — целые, $k > 0$. Найдите значение $f(-6, 4)$.



Ответ: _____.

- 12 Найдите точку минимума функции $y = (67 - x)e^{67-x}$.

Ответ: _____.



Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение $\operatorname{tg} x - 2 \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = 0$.
- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.
- 14 На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 3 : 1$, а на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 3 : 5$. Известно, что $AB = 4$, $AD = 6$, $AA_1 = 8$.
- а) Докажите, что плоскость EFD_1 делит ребро $B_1 C_1$ на два равных отрезка.
- б) Найдите угол между плоскостью EFD_1 и плоскостью $AA_1 B_1$.
- 15 Решите неравенство $7^{\ln(x^2 - 2x)} \leq (2 - x)^{\ln 7}$.
- 16 Иван планирует 14 декабря взять в банке кредит на 2 года в размере 43 000 рублей. Сотрудник банка предложил Ивану два различных плана погашения кредита, описание которых приведено в таблице.

План 1	— каждый январь долг возрастает на 15 % по сравнению с концом предыдущего года; — с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга; — кредит должен быть полностью погашен за два года двумя равными платежами.
План 2	— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3 % по сравнению с концом предыдущего месяца; — со 2-го по 13-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; — 14-го числа каждого месяца с 1-го по 24-й долг должен быть меньше долга на 14-е число предыдущего месяца на одну и ту же сумму; — к 14-му числу 24-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

На сколько рублей меньше окажется общая сумма выплат Ивана банку по более выгодному плану погашения кредита?

- 17 Из вершины тупого угла при вершине C треугольника ABC проведена высота CH . Окружность с центром H и радиусом HC пересекает второй раз стороны AC и BC в точках M и N соответственно, CD — диаметр этой окружности.
- а) Докажите, что угол MDN равен сумме углов A и B треугольника ABC .
- б) Найдите отношение MN к AB , если известно, что $CM : MA = 1 : 11$ и $CN : NB = 1 : 2$.
- 18 Найдите все значения a , при которых интервал $(-1; 1)$ не содержит точек минимума функции $f(x) = ax^3 - 2ax^2 + 3x + |2ax - a^2 - 1|$.
- 19 На доске разрешается в одну строку так написать $n \geq 3$ различных натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, чтобы для любого $k = 1, 2, \dots, n - 2$ число a_{k+2} равнялось либо сумме, либо разности, либо произведению, либо частному взятых в некотором порядке чисел a_{k+1} и a_k . Например, этим правилам удовлетворяют 4 числа: 3, 12, 4, 8, а также 5 чисел: 8, 2, 4, 6, 24, написанные в указанном порядке.
- а) Можно ли по этим правилам так написать $n = 5$ чисел, чтобы среди них в некотором порядке встретились четыре числа 1, 2, 3 и 4?
- б) Можно ли по этим правилам так написать $n = 4$ нечётных числа, чтобы среди них в некотором порядке встретились три числа 3, 5 и 7?
- в) Какое наименьшее значение может принимать n , если на доске в некотором порядке встречаются числа 1, 2 и 8?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

СИСТЕМА ОЦЕНИВАНИЯ ЭКЗАМЕНАЦИОННОЙ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным; все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

ВАРИАНТ 1

Часть 2

13 а) Решите уравнение $\frac{5 \sin^2(\pi + x) + 3 \cos(\frac{\pi}{2} + x)}{5 \sin(\frac{\pi}{2} + x) - 4} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

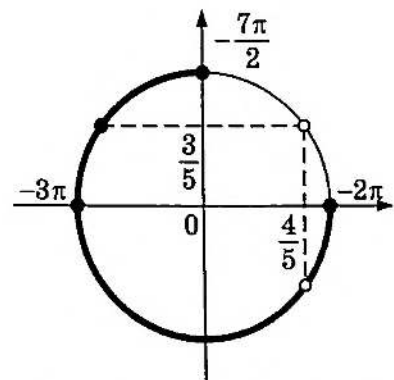
$$\frac{5 \sin^2 x - 3 \sin x}{5 \cos x - 4} = 0; \quad \frac{\sin x (5 \sin x - 3)}{5 \cos x - 4} = 0.$$

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \sin x (5 \sin x - 3) = 0, \\ 5 \cos x - 4 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{3}{5} \\ \cos x \neq \frac{4}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \arcsin \frac{3}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$.

Получим числа: $-3\pi - \arcsin \frac{3}{5}, -3\pi, -2\pi$.



Ответ: а) $\pi n, n \in \mathbb{Z}; \pi - \arcsin \frac{3}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-3\pi - \arcsin \frac{3}{5}, -3\pi, -2\pi$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

- 17 Точка P лежит на стороне AC равностороннего треугольника ABC . Окружность с диаметром BP пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Хорды MF и NE параллельны прямой BP . Отрезки FP и EP пересекают стороны AB и BC в точках T и S соответственно.
- а) Докажите, что треугольники APT и CSP подобны.
- б) Найдите отношение, в котором точка P делит отрезок AC , если площади треугольников APT и CSP относятся как $4 : 9$.

Решение.

а) Углы MFP и MBP равны, так как опираются на дугу MP , а углы MFP и FPB равны как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых MF и PB и секущей FP . Следовательно, $\angle MBP = \angle BPF$. Аналогично $\angle PBN = \angle BPS$.

Отсюда следует, что $\angle TPS = \angle TBS = 60^\circ$.

Пусть $\angle CPS = \alpha$, тогда из треугольника CPS находим, что

$$\angle PSC = 180^\circ - 60^\circ - \alpha = 120^\circ - \alpha.$$

По свойству смежных углов получаем, что

$$\angle APT = 180^\circ - \angle TPC = 180^\circ - 60^\circ - \alpha = 120^\circ - \alpha.$$

Значит, $\angle PSC = \angle APT = 120^\circ - \alpha$ и $\angle TAP = \angle SCP = 60^\circ$, следовательно, треугольники APT и CSP подобны по двум углам.

б) Так как площади треугольников APT и CSP относятся как $4 : 9$, то коэффициент подобия равен $\frac{2}{3}$. Пусть $AP = 2x$, $SC = 3x$, $AT = 2y$, $PC = 3y$, $AB = BC = AC = a$, тогда

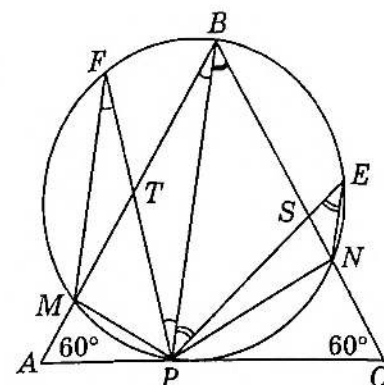
$TB = a - 2y$, $BS = a - 3x$. Треугольники PTB и PBS — равнобедренные, поэтому $TP = TB = a - 2y$, $PS = BS = a - 3x$.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y = a, \\ \frac{a - 3x}{a - 2y} = \frac{3}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y = a, \\ 2(a - 3x) = 3(a - 2y); \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y = a, \\ -6x + 6y = a. \end{cases}$$

Откуда получаем, что $8x - 3y = 0$, $x = \frac{3}{8}y$. Тогда $\frac{AP}{PC} = \frac{2x}{3y} = \frac{2 \cdot \frac{3}{8}y}{3y} = \frac{1}{4}$.

Ответ: $1 : 4$.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{2x^3 - (a+20)x^2 + 2a(5+a)x - a^3}{\sqrt{10-x+a}} = 0$$

имеет ровно одно решение.

Решение.

Разложим на множители числитель левой части:

$$\begin{aligned} 2x^3 - (a+20)x^2 + 2a(5+a)x - a^3 &= 2x^3 - ax^2 - 20x^2 + 10ax + 2a^2x - a^3 = \\ &= x^2(2x-a) - 10x(2x-a) + a^2(2x-a) = (2x-a)(x^2 - 10x + a^2). \end{aligned}$$

В выражении $x^2 - 10x + a^2$ выделим сумму квадратов:

$$x^2 - 10x + 25 + a^2 - 25 = (x-5)^2 + a^2 - 25.$$

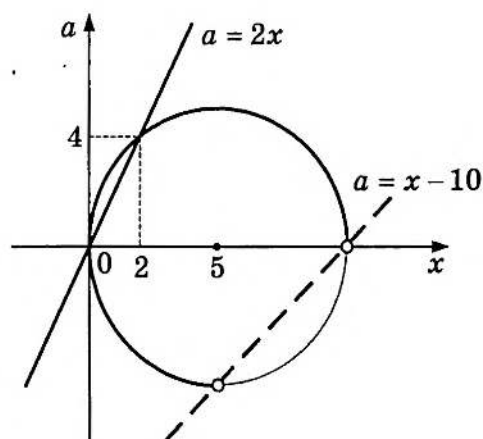
Получается система:

$$\begin{cases} ((x-5)^2 + a^2 - 25)(a-2x) = 0, \\ 10-x+a > 0. \end{cases}$$

На координатной плоскости xOa система определяет часть объединения окружности $(x-5)^2 + a^2 = 25$ и прямой $a = 2x$, расположенную в полуплоскости $a > x - 10$ (см. рис.).

Центр окружности находится в точке $(0; 5)$, радиус равен 5. Прямая $a = x - 10$ пересекает окружность в точках $(5; -5)$ и $(10; 0)$, а прямая $a = 2x$ — в точках $(0; 0)$ и $(2; 4)$. Прямые $a = 2x$ и $a = x - 10$ пересекаются в точке с координатами $(-10; -20)$.

Следовательно, ровно одно решение уравнение имеет при $-20 < a \leq -5$, $a = 0$ и $a > 5$.



Ответ: $-20 < a \leq -5$, $a = 0$, $a > 5$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a , но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

- 19 Из натурального числа вычли сумму его цифр и получили натуральное число A .
- Может ли A равняться 99?
 - Может ли A равняться 1980?
 - Найдите все натуральные числа, кратные 3, для которых $A = 22\ 158$.

Решение.

Сумму цифр натурального числа n будем обозначать через $S(n)$.

а) Да, может: если $n = 103$, то $A = n - S(n) = 99$.

б) Пусть $A = 1980$. Тогда n — четырёхзначное число: если $n < 1000$, то $A = n - S(n) < 1000$; если $n > 9999$, то $A = n - S(n) > 10\ 000 - 9 \cdot 5 = 9955$.

Итак, $n = \overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$. По условию,

$$A = n - S(n) = 1980,$$

$$1000a + 100b + 10c + d - (a + b + c + d) = 1980,$$

$$9(111a + 11b + c) = 1980,$$

$$111a + 11b + c = 220.$$

Если $a = 1$, то $111a + 11b + c \leq 111 + 99 + 9 = 219 < 220$.

Если $a > 1$, то $111a + 11b + c \geq 222 > 220$. Значит, уравнение $111a + 11b + c = 220$ не имеет решений при условии, что a, b и c — цифры. Поэтому A не может равняться 1980.

в) Пусть $A = 22\ 158$. Тогда n — пятизначное число: если $n < 10\ 000$, то $A = n - S(n) < 10\ 000$; если $n > 99\ 999$, то $A = n - S(n) < 100\ 000 - 9 \cdot 6 = 99\ 946$.

Итак, $n = \overline{abcde} = 10\ 000a + 1000b + 100c + 10d + e$. По условию,

$$A = n - S(n) = 22\ 158,$$

$$10\ 000a + 1000b + 100c + 10d + e - (a + b + c + d + e) = 22\ 158,$$

$$9(1111a + 111b + 11c + d) = 22\ 158,$$

$$1111a + 111b + 11c + d = 2462.$$

Если $a = 1$, то $1111a + 111b + 11c + d \leq 1111 + 999 + 99 + 9 = 2218 < 2462$.

Если $a > 2$, то $1111a + 111b + 11c + d \geq 3333 > 2462$.

Значит, $a = 2$, и $111b + 11c + d = 240$.

Если $b = 1$, то $111b + 11c + d \leq 111 + 99 + 9 = 219 < 240$. Если $b > 2$, то $111b + 11c + d \geq 333 > 240$. Значит, $b = 2$ и $11c + d = 18$, откуда $c = 1$ и $d = 7$.

По условию, n кратно 3, поэтому сумма цифр $a + b + c + d + e = 12 + e$ кратна 3, откуда $e = 0, 3, 6$ или 9 .

Ответ: а) да; б) нет; в) 22 170; 22 173; 22 176; 22 179.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в и обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а и б ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ВАРИАНТ 6

Часть 2

13 а) Решите уравнение $256^{\sin x \cos x} - 18 \cdot 16^{\sin x \cos x} + 32 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$4^{2\sin 2x} - 18 \cdot 4^{\sin 2x} + 32 = 0.$$

Отсюда $4^{\sin 2x} = 2$ или $4^{\sin 2x} = 16$.

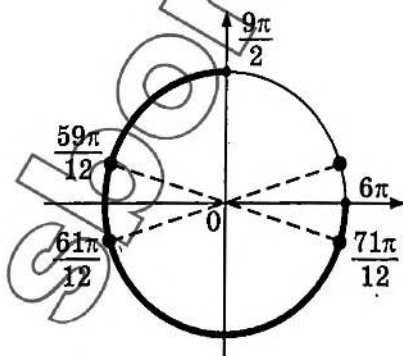
В первом случае получаем, что $\sin 2x = \frac{1}{2}$,

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Во втором случае получаем $\sin 2x = 2$, чего не может быть.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$.

Получим числа: $\frac{59\pi}{12}, \frac{61\pi}{12}, \frac{71\pi}{12}$.



Ответ: а) $x = \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{5\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{59\pi}{12}, \frac{61\pi}{12}, \frac{71\pi}{12}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

- 14 В правильной треугольной пирамиде $SABCD$ через середины боковых рёбер SA и SB перпендикулярно основанию ABC проведена плоскость α .
- а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания пирамиды в отношении $5 : 1$, считая от вершины C .
- б) Найдите объём пирамиды с вершиной в точке C , основанием которой служит сечение пирамиды $SABC$ плоскостью α , если $AB = 60$, $SA = 37$.

Решение.

а) Пусть точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно, SO — высота пирамиды.

Отметим середину отрезка AO — точку M_1 . В треугольнике SAO отрезок MM_1 является средней линией, поэтому $MM_1 \parallel SO$, а значит, $MM_1 \perp ABC$.

Отметим середину отрезка BO — точку N_1 . В треугольнике SBO отрезок NN_1 является средней линией, поэтому $NN_1 \parallel SO$, а значит, $NN_1 \perp ABC$ и $NN_1 \parallel MM_1$. Плоскость α проходит через параллельные прямые MM_1 и NN_1 и перпендикулярна плоскости ABC по признаку перпендикулярности плоскостей (так как плоскость α проходит через прямую MM_1 , перпендикулярную плоскости ABC).

В треугольнике AOB отрезок M_1N_1 — средняя линия, значит, $M_1N_1 \parallel AB$. Пусть M_1N_1 пересекает отрезок OE в точке P . Тогда по теореме Фалеса $OP = PE$.

Таким образом, $PE = \frac{1}{2}OE = \frac{1}{6}CE$, значит, $CP = \frac{5}{6}CE$, $CP : PE = 5 : 1$.

б) Пусть прямая M_1N_1 пересекает рёбра AC и BC в точках M_2 и N_2 соответственно. Трапеция MNN_2M_2 является сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α . Таким образом, нам требуется найти объём пирамиды $CMNN_2M_2$. Отрезок CP — высота пирамиды $CMNN_2M_2$, $CP = \frac{5}{6}CE = \frac{5}{6} \cdot 30\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$.

Так как $CO = \frac{2}{3}CE = 20\sqrt{3}$, а $SC = 37$, то по теореме Пифагора

$$SO = \sqrt{37^2 - 1200} = 13.$$

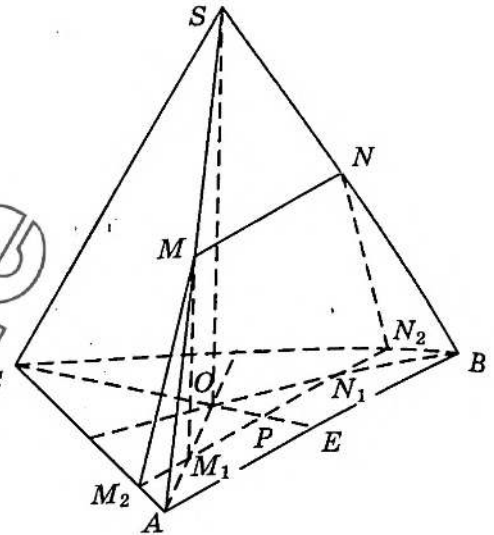
Найдём площадь трапеции MNN_2M_2 .

$$S_{MNN_2M_2} = \frac{MN + M_2N_2}{2} \cdot MM_1 = \frac{\frac{1}{2}AB + \frac{5}{6}AB}{2} \cdot \frac{SO}{2} = \frac{30 + 50}{2} \cdot \frac{13}{2} = 260.$$

Следовательно,

$$V_{EMNN_2M_2} = \frac{1}{3} \cdot 260 \cdot 25\sqrt{3} = \frac{6500\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: б) $\frac{6500\sqrt{3}}{3}$.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

15 Решите неравенство $\frac{16^x - 2^{3+2x} + 16}{16^x - 7 \cdot 4^x + 10} \geq 0$.

Решение.

Преобразуем неравенство: $\frac{4^{2x} - 8 \cdot 4^x + 16}{4^{2x} - 7 \cdot 4^x + 10} \geq 0, \frac{(4^x - 4)^2}{(4^x - 2)(4^x - 5)} \geq 0$.

Отсюда получаем, что $\begin{cases} 4^x < 2, & x < 0,5, \\ 4^x > 5, & x > \log_4 5, \\ 4^x = 4; & x = 1. \end{cases}$

Таким образом, $x \in (-\infty; 0,5) \cup \{1\} \cup (\log_4 5; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 0,5), \{1\}, (\log_4 5; +\infty)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2025	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028	Июль 2029
Долг (в млн рублей)	S	$0,8S$	$0,5S$	$0,3S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором каждая из выплат будет меньше 2 млн рублей.

Решение.

Долг перед банком (в млн рублей) на июль каждого года должен уменьшаться до нуля следующим образом: S ; $0,8S$; $0,5S$; $0,3S$; 0 .

По условию, в январе каждого года долг увеличивается на 15 %, значит, долг в январе каждого года равен: $1,15S$; $0,92S$; $0,575S$; $0,345S$.

Следовательно, выплаты с февраля по июнь каждого года составляют: $0,35S$; $0,42S$; $0,275S$; $0,345S$.

Наибольшая из выплат должна быть меньше 2 млн рублей: $0,42S < 2$; $S < 4\frac{16}{21}$.

Наибольшее целое решение этого неравенства — число 4. Значит, искомый размер кредита — 4 млн рублей.

Ответ: 4 млн рублей.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

- 17** На диагонали LN параллелограмма $KLMN$ отмечены точки P и Q , причём $LP = PQ = QN$. Прямые KP и KQ пересекают прямую LM в точках R и T соответственно.

а) Докажите, что $LR : RT = 1 : 3$.

б) Найдите площадь параллелограмма $KLMN$, если площадь пятиугольника $PRMSQ$, где S — точка пересечения прямой KQ со стороной, равна 15.

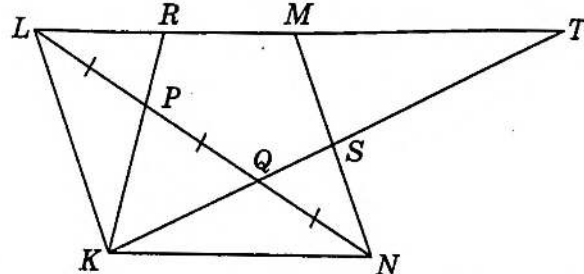
Решение.

а) Треугольники LRP и NKP подобны по двум углам. Отсюда $\frac{LR}{KN} = \frac{LP}{PN} = \frac{1}{2}$, знач-

чит, $\frac{LR}{LM} = \frac{1}{2}$, т. е. точка R — середина стороны LM .

Аналогично из подобия треугольников SNQ и KLQ получаем, что S — середина MN .

Треугольники KSN и TSM равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, значит, $KN = MT$. Таким образом,



$$LR = \frac{1}{2} LM, \quad RT = RM + MT = \frac{1}{2} LM + LM = \frac{3}{2} LM,$$

т.е. $LR : RT = 1 : 3$.

б) Пусть $KN = LM = a$, $KL = MN = b$, h — высота параллелограмма $KLMN$, проведённая к сторонам KN и LM , t — высота, проведённая к сторонам KL и MN . Тогда

$$S_{PLR} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{h}{3} = \frac{ah}{12} = \frac{S_{KLMN}}{12}, \quad S_{NQS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{t}{3} = \frac{bt}{12} = \frac{S_{KLMN}}{12}.$$

$$S_{PRMSQ} = S_{NLM} - S_{PLR} - S_{NQS} = \frac{S_{KLMN}}{2} - \frac{S_{KLMN}}{12} - \frac{S_{KLMN}}{12} = \frac{S_{KLMN}}{3}.$$

Таким образом, $S_{KLMN} = 3S_{PRMSQ} = 3 \cdot 15 = 45$.

Ответ: б) 45.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{4x^3 - 3ax^2 + 4(a^2 - 25)x - 3a^3 + 75a}{\sqrt{x^2 + a^2} - 9} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Разложим на множители числитель левой части:

$$\begin{aligned} 4x^3 - 3ax^2 + 4(a^2 - 25)x - 3a^3 + 75a &= x^2(4x - 3a) + (a^2 - 25)(4x - 3a) = \\ &= (4x - 3a)(x^2 + a^2 - 25). \end{aligned}$$

Получается система

$$\begin{cases} (x^2 + a^2 - 25)(3a - 4x) = 0, \\ x^2 + a^2 > 9, \end{cases}$$

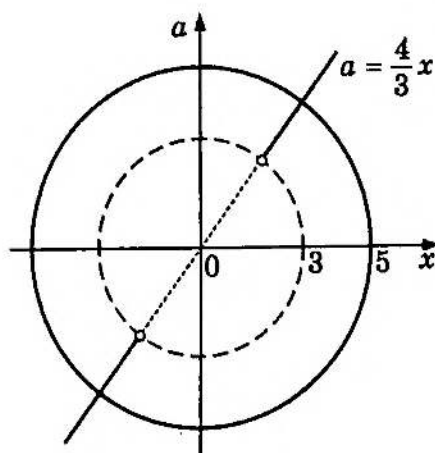
которая на координатной плоскости xOa определяет часть объединения окружности $x^2 + a^2 = 25$ и прямой $a = \frac{4}{3}x$, расположенную вне круга $x^2 + a^2 \leq 9$ (см. рис.).

Окружности $x^2 + a^2 = 9$ и $x^2 + a^2 = 25$ имеют радиусы 3 и 5 соответственно и общий центр в начале координат.

Прямая $a = \frac{4}{3}x$ и окружность $x^2 + a^2 = 9$ пересекаются в точках с координатами $(1,8; 2,4)$ и $(-1,8; -2,4)$. Прямая $a = \frac{4}{3}x$ и окружность $x^2 + a^2 = 25$ пересекаются в точках с координатами $(3; 4)$ и $(-3; -4)$.

Следовательно, ровно два различных корня уравнение имеет при $a = -5$, $a = -4$, $-2,4 \leq a \leq 2,4$, $a = 4$ и $a = 5$.

Ответ: а) $a = -5$, $a = -4$, $-2,4 \leq a \leq 2,4$, $a = 4$ и $a = 5$.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a , но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

- 19) Одноклассники Петя и Вася играют в игру. Петя записывает на доске число m , а затем Вася выбирает нечётное натуральное число $n > 1$ и записывает на доске число

$$\left(1 + \frac{2}{3^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{5^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{2}{n^2}\right).$$

Побеждает тот, чье число окажется большим.

а) Кто победит, если $m = \frac{6}{5}$, $n = 7$?

б) Кто победит, если $m = \frac{13}{10}$, $n = 13$?

в) Кто победит, если $m = \frac{14}{5}$, $n = 20282$?

Решение.

Для нечётного $n > 1$ обозначим как P_n произведение

$$\left(1 + \frac{2}{3^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{5^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{2}{n^2}\right).$$

а) Победит Вася, поскольку

$$P_7 = \left(1 + \frac{2}{3^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{5^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{7^2}\right) = \frac{11}{9} \cdot \frac{27}{25} \cdot \frac{51}{49} = \frac{11}{49} \cdot \frac{27}{9} \cdot \frac{51}{25} > \frac{10}{50} \cdot 3 \cdot \frac{50}{25} = \frac{6}{5} = m.$$

б) Пусть $n = 13$. Оценим значение P_{13} следующим образом:

$$\begin{aligned} P_7 &= \left(1 + \frac{2}{3^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{5^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{7^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{11^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{13^2}\right) = \frac{11 \cdot 27 \cdot 51 \cdot 83 \cdot 123 \cdot 171}{9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 81 \cdot 121 \cdot 169} = \\ &= \frac{17 \cdot 83 \cdot 41 \cdot 57}{25 \cdot 49 \cdot 11 \cdot 169} > \frac{17 \cdot 82 \cdot 41 \cdot 55}{25 \cdot 50 \cdot 11 \cdot 170} = \frac{41 \cdot 41}{25 \cdot 50} = \frac{1681}{1250}. \end{aligned}$$

Итак, $P_7 > \frac{1681}{1250}$. Заметим, что

$$1681 = 1690 - 9 = 13^2 \cdot 10 - 9 > 13^2 \cdot 10 - 13 = 13 \cdot (130 - 1) = 13 \cdot 129$$

и $1250 < 10 \cdot 129$. Поэтому $P_7 > \frac{1681}{1250} > \frac{13 \cdot 129}{10 \cdot 129} = \frac{13}{10}$. Значит, победит Вася.

в) Заметим, что $\ln(1+x) < x$ при $x > 0$. Действительно, $\ln(1+x) = x = 0$ при $x = 0$ и $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} < 1 = x'$ при $x > 0$. Используя это неравенство, для нечётного $n > 1$ получим, что

$$\ln(P_n) = \ln\left(1 + \frac{2}{3^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{5^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) < \frac{2}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \dots + \frac{2}{n^2} < \\ < \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{(n-2) \cdot n} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

При этом $\ln \frac{14}{5} > 1$, поскольку $\frac{14}{5} = 2,8 > e$. Значит, $\ln(P_n) < \ln \frac{14}{5}$ и $P_n < \frac{14}{5}$ для любого нечётного $n > 1$. В частности, $P_{2023} < \frac{14}{5}$, и в нашем случае победит Петя.

Ответ: а) Вася, б) Вася, в) Петя.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в и обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а и б ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ВАРИАНТ 11

Часть 2

13 а) Решите уравнение $4 \sin x \cos^2 x - 1 = 2 \cos x (\sin x - 1)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$4 \sin x \cos^2 x - 1 = 2 \sin x \cos x - 2 \cos x;$$

$$2 \cos x \cdot \sin 2x - 1 = \sin 2x - 2 \cos x;$$

$$\sin 2x (2 \cos x - 1) + (2 \cos x - 1) \neq 0;$$

$$(2 \cos x - 1)(\sin 2x + 1) = 0.$$

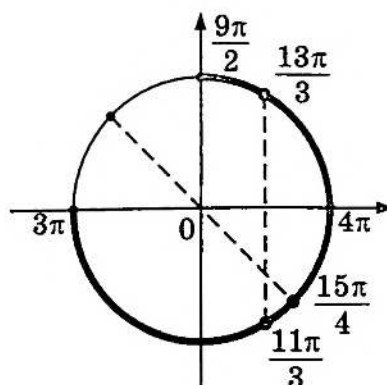
Значит, $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, или $\sin 2x = -1$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью единичной окружности отберём корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

$$4\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{3};$$

$$4\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{15\pi}{4};$$

$$4\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{3}.$$



Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{3}$; $\frac{15\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

- 14 В правильной треугольной пирамиде $MAVC$ двугранный угол при основании равен $\arctg 2$. Через точку K ребра MC и вершины A и B проходит плоскость α так, что площадь сечения пирамиды плоскостью α относится к площади основания как $1 : \sqrt{2}$.

а) Докажите, что прямая MC перпендикулярна плоскости α .

б) Найдите объём пирамиды $MAVK$, если объём пирамиды $MAVC$ равен $24\sqrt{7}$.

Решение.

а) Пусть MO — высота данной пирамиды, а MP — высота боковой грани MAV . Угол MPO является линейным углом двугранного угла при ребре AB . Пусть $PO = 2x$, тогда из прямоугольного треугольника MPO получаем, что $MO = 4x$ и $MP = 2\sqrt{5}x$.

Так как O — точка пересечения медиан треугольника ABC , то $OC = 2PO = 4x$, $PC = 3PO = 6x$.

Из прямоугольного треугольника MOC находим, что $MC = 4\sqrt{2}x$.

Треугольник AVK является сечением пирамиды плоскостью α . Так как площадь треугольника AVK относится к площади треугольника ABC как $1 : \sqrt{2}$, то $PK : PC = 1 : \sqrt{2}$. Поэтому $PK = 3\sqrt{2}x$.

Опустим из точки P перпендикуляр PK_1 на прямую MC . Найдём его длину. Так как $MO \cdot PC = 2S_{MPC} = PK_1 \cdot MC$, то $PK_1 = \frac{MO \cdot PC}{MC} = 3\sqrt{2}x = PK$. Если бы точки K и K_1 были различны, то PK_1 было бы больше PK . Значит, точки K и K_1 совпадают и $PK \perp MC$.

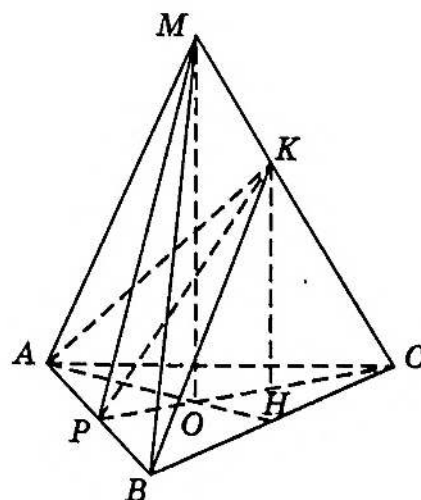
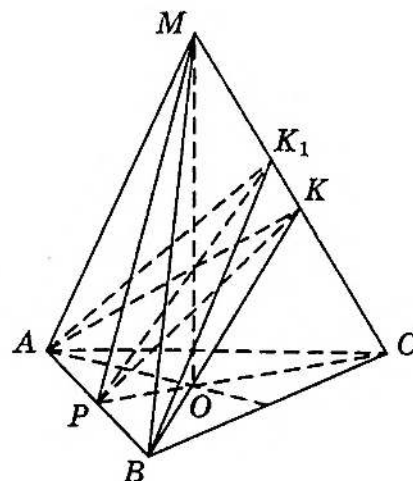
Кроме этого, $MC \perp AB$, так как прямая AB перпендикулярна плоскости MPC , в которой лежит прямая MC .

Отсюда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости следует, что прямая MC перпендикулярна плоскости α .

б) Из треугольника PMK найдём MK по теореме Пифагора:

$$MK = \sqrt{PM^2 - PK^2} = x\sqrt{20 - 18} = x\sqrt{2}.$$

Так как $MK = \frac{1}{4}MC$, то $KC = \frac{3}{4}MC$, а значит, высота KH пирамиды $KAVC$, проведённая из вершины K , равна $\frac{3}{4}MO$. Следовательно, объём пирамиды $KAVC$ составляет $\frac{3}{4}$ объёма пирамиды $MAVC$. Отсюда получаем, что объём пирамиды $MAVK$ составляет $\frac{1}{4}$ объёма пирамиды $MAVC$, то есть равен $6\sqrt{7}$.



Ответ: б) $6\sqrt{7}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Получен обоснованный ответ в пункте <i>b</i> ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

15) Решите неравенство $\frac{4x^3 + 4x^2 - 7x + 2}{2 - 11 \cdot 2^{1-x} + 3 \cdot 4^{2-x}} \leq 0$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{4x^3 + 4x^2 - 7x + 2}{2 - 11 \cdot 2^{1-x} + 3 \cdot 2^{4-2x}} \leq 0;$$

$$\frac{(2x-1)^2(x+2)}{2^{1-2x}(2^{2x} - 11 \cdot 2^x + 24)} \leq 0;$$

$$\frac{(2x-1)^2(x+2)}{2^{1-2x} \cdot (2^x - 8)(2^x - 3)} \leq 0,$$

откуда получаем $x \leq -2$ или $x = \frac{1}{2}$ или $\log_2 3 < x < 3$.

Ответ: $(-\infty; -2]; \frac{1}{2}; (\log_2 3; 3)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

- 16 Андрей планирует 12 декабря взять в банке кредит на 3 года в размере 6 556 200 рублей. Сотрудник банка предложил Андрею два различных плана погашения кредита, описание которых приведено в таблице.

План 1	– каждый январь долг возрастает на 9 % по сравнению с концом предыдущего года; – с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга; – кредит должен быть полностью погашен за три года тремя равными платежами.
План 2	– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца; – со 2-го по 11-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; – 12-го числа каждого месяца со 2-го по 36-й долг должен быть меньше долга на 12-е число предыдущего месяца на одну и ту же сумму; – к 12-му числу 36-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

На сколько рублей меньше окажется общая сумма выплат Андрея банку по более выгодному плану погашения кредита?

Решение.

Пусть X рублей — ежегодный платёж Андрея по плану 1.

Тогда

$$((6\,556\,200 \cdot 1,09 - X) \cdot 1,09 - X) \cdot 1,09 - X = 0.$$

Отсюда получаем

$$X = \frac{6\,556\,200 \cdot 1,09^3}{1,09^2 + 1,09 + 1} = \frac{6\,556\,200 \cdot 1,295029}{3,2781} = 2\,590\,058.$$

Значит, по плану 1 Андрей заплатит банку всего $2\,590\,058 \cdot 3 = 7\,770\,174$ рубля.

Платежи Андрея по плану 2 составят:

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= \frac{6\,556\,200}{36} + 0,01 \cdot 6\,556\,200; \\
 Y_2 &= \frac{6\,556\,200}{36} + 0,01 \cdot \frac{35}{36} \cdot 6\,556\,200; \\
 &\dots \\
 Y_{36} &= \frac{6\,556\,200}{36} + 0,01 \cdot \frac{1}{36} \cdot 6\,556\,200.
 \end{aligned}$$

Тогда всего Андрей заплатит банку по плану 2:

$$Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{36} = 6\,556\,200 + 65\,562 \left(1 + \frac{35}{36} + \dots + \frac{1}{36} \right) = 7\,769\,097 \text{ рублей.}$$

Значит, по плану 2 общая сумма выплат Андрея банку меньше на

$$7\,770\,174 - 7\,769\,097 = 1077 \text{ рублей.}$$

Ответ: 1077.

Критерии оценивания выполнения задания		Баллы
Обоснованно получен верный ответ		2
Верно построена математическая модель		1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше		0
Максимальный балл		2

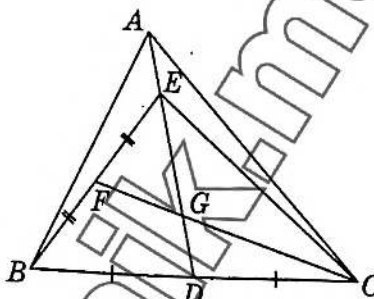
- 17 На медиане AD треугольника ABC отметили точку E . Точка F — середина отрезка BE , G — точка пересечения отрезков AD и CF . Отношение площади треугольника EFG к площади треугольника ABC равно $1 : 8$.

а) Докажите, что $AE : ED = 1 : 3$.

б) Найдите площадь четырёхугольника $BDGF$, если $BC = 3\sqrt{29}$, $AB = 7$, $AC = 10$.

Решение.

а) Пусть S — это площадь треугольника ABC , тогда площадь треугольника EFG равна $\frac{1}{8}S$.



Обозначим $AE : ED = x : y$, тогда $ED = \frac{y}{x+y}AD$, поэтому $S_{BEC} = \frac{y}{x+y}S$, так как треугольники ABC и BEC имеют общее основание BC .

Треугольники FEC и BEC имеют общую высоту, проведённую к стороне BE , поэтому

$$S_{FEC} = \frac{1}{2}S_{BEC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x+y}S.$$

Треугольники EFG и EFC имеют общее основание EF , а высоты этих треугольников, проведённые к стороне EF , относятся как $1 : 3$, так как G — это точка пересечения медиан CF и ED треугольника BCE . Отсюда получаем, что $S_{EFG} = \frac{1}{3} \cdot S_{EFC} = \frac{1}{6} \cdot \frac{y}{x+y}S$.

Следовательно, $\frac{1}{6} \cdot \frac{y}{x+y}S = \frac{1}{8}S$, $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$.

Значит, $AE : ED = 1 : 3$.

б) Для стороны BC треугольника ABC запишем теорему косинусов.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC.$$

Отсюда находим, что $\cos \angle BAC = -\frac{4}{5}$, значит, $\sin \angle BAC = \frac{3}{5}$.

Следовательно, $S = S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 10 \cdot \frac{3}{5} = 21$.

Отсюда получаем, что $S_{BDGF} = S_{BED} - S_{EFG} = \frac{3}{8}S - \frac{1}{8}S = \frac{1}{4}S = \frac{21}{4}$.

Ответ: $\frac{21}{4}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

18 Найти все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{x}(x^2 + x + 2) - yx^3 = yx(x + 2), \\ y^2 + (a - 8)y + (a + 3)(5 - 2a) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

Второе уравнение имеет корни:

$$y = a + 3 \text{ и } y = 5 - 2a.$$

Преобразуем первое уравнение:

$$(x^2 + x + 2)(\sqrt{x} - xy) = 0,$$

откуда $x = 0$ или $x = \frac{1}{y^2}$

Следовательно, в общем случае система имеет четыре решения

$$1) (0; a + 3), 2) (0; 5 - 2a), 3) \left(\frac{1}{(a + 3)^2}; a + 3 \right), 4) \left(\frac{1}{(5 - 2a)^2}; 5 - 2a \right).$$

При этом одновременно существуют не менее трёх из них, так как выражения $a + 3$ и $5 - 2a$ не обращаются в нуль одновременно.

Чтобы система имела ровно два решения, нужно, чтобы какие-то из этих четырёх решений совпадали.

Ни одно из решений 1 и 2 не может совпадать ни с каким из решений 3 и 4. Значит, должны совпасть решения 1 и 2 или решения 3 и 4.

Это выполняется в единственном случае: $a + 3 = 5 - 2a \neq 0$, откуда $a = \frac{2}{3}$.

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a , но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

- 19 Для натурального числа n рассмотрим выражение

$$P(n) = n + s(n) + 2s(s(n)),$$

где $s(m)$ — сумма цифр натурального числа m (например, $P(999) = 999 + 27 + 18 = 1044$).

- а) Может ли $P(n)$ равняться 208 при некотором n ?
 б) Может ли $P(n)$ равняться 190 при некотором n ?
 в) Найдите все натуральные n , для которых $P(n) = 2022$.

Решение.

Заметим, что сумма цифр натурального числа имеет тот же остаток от деления на 9, что и само число. Пусть $n = 9k + q$. Тогда $P(n) = 9p + 4q$ (k, p и q — некоторые натуральные числа).

- а) Да, при $n = 178$. Покажем, как найти такой пример. Очевидно, что $s(n) < 2 + 9 + 9 = 20$ и $s(s(n)) \leq 1 + 9 = 10$ при $n \leq 208$.

Поэтому $n \geq 208 - 19 - 2 \cdot 10 = 169$. Перебирая числа, большие 168, найдём, что $P(178) = 208$.

- б) При $n \leq 190$ верны неравенства $s(n) \leq 18$ и $s(s(n)) \leq 9$, а значит, $n \geq 190 - 18 - 2 \cdot 9 = 154$. При этом $4q$ при делении на 9 даёт остаток 1, откуда $q = 7$. На отрезке $[154; 190]$ чисел, при делении на 9 дающих остаток 7, ровно четыре: 160, 169, 178 и 187. Ни одно из этих чисел не удовлетворяет условию $P(n) = 188$.

- в) Очевидно, что $s(n) < 2 + 9 + 9 + 9 = 29$ и $s(s(n)) \leq 2 + 9 = 11$ при $n \leq 2022$. Поэтому $n \geq 2022 - 18 - 2 \cdot 11 = 1982$. При этом $4q$ имеет остаток 6 от деления на 9, откуда $q = 6$. На отрезке $[1982; 2022]$ чисел, имеющих остаток 6 от деления на 9, ровно четыре: 1986, 1995, 2004 и 2013. Из этих чисел условию $P(n) = 2022$ удовлетворят два: 1986 и 2004.

Ответ: а) да, например при $n = 178$; б) нет; в) 1986 и 2004.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в и обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а и б ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ВАРИАНТ 21

Часть 2

- 13 а) Решите уравнение $\cos 2x + \sqrt{2} \sin x + 1 = 0$.
 б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$\cos 2x + \sqrt{2} \sin x + 1 = 0; 1 - 2 \sin^2 x + \sqrt{2} \sin x + 1 = 0;$$

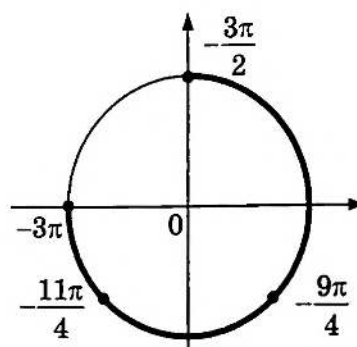
$$2 \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x - 2 = 0; \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ или } \sin x = \sqrt{2}.$$

Уравнение $\sin x = \sqrt{2}$ не имеет решений. Из уравнения $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ находим:

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \text{ и } x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Получаем числа $x = -\frac{11\pi}{4}$ и $x = -\frac{9\pi}{4}$.



Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k, -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{4}, -\frac{9\pi}{4}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

- 14 В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 3$ и диагональю $BD = 5$. Все боковые рёбра пирамиды равны 3. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E , а на ребре AS — точка F так, что $SF = BE = 2$.
 а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB .
 б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q . Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC .

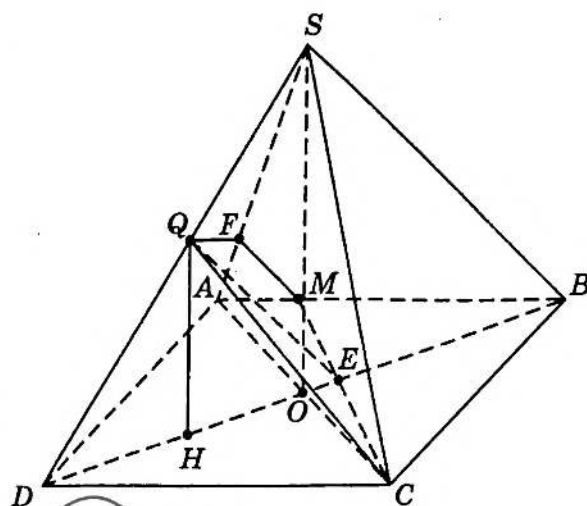
Решение.

а) $DE = 5 - BE = 3$. Пусть прямая CE пересекает ребро AB в точке M . Треугольники BME и DCE подобны, поэтому $\frac{BM}{DC} = \frac{BE}{DE} = \frac{2}{3}$, откуда $BM = 2$. Тогда $AM = 1$. Треугольники ABS и AMF подобны, значит, $FM \parallel SB$. Поэтому прямая SB параллельна плоскости CEF .

б) Прямая QE — прямая пересечения плоскостей CEF и SBD . Из доказанного в предыдущем пункте следует, что $QE \parallel SB$. Тогда

$$\frac{DQ}{QS} = \frac{DE}{EB} = \frac{3}{2}.$$

Пусть O — центр основания $ABCD$. Так как все боковые рёбра пирамиды равны, SO — высота пирамиды.



$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{9 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Плоскость SDB перпендикулярна плоскости основания, и проекция H точки Q на плоскость основания лежит на отрезке DO . Из подобных треугольников DQH и DSO

$$\text{находим } QH = \frac{3}{5} \cdot SO = \frac{3\sqrt{11}}{10}.$$

Ответ: б) $\frac{3\sqrt{11}}{10}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

15) Решите неравенство $5^{x+3} - 5^{x+2} - 5^x < 6^{\frac{x}{2}+3} - 6^{\frac{x}{2}+2} + 3 \cdot 6^{\frac{x}{2}+1}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$125 \cdot 5^x - 25 \cdot 5^x - 5^x < 36 \cdot 6^{\frac{x}{2}+1} - 6 \cdot 6^{\frac{x}{2}+1} + 3 \cdot 6^{\frac{x}{2}+1}; \quad 99 \cdot 5^x < 33 \cdot 6^{\frac{x}{2}+1}; \quad 3 \cdot 5^x < 6^{\frac{x}{2}+1};$$

$$\lg 3 + x \lg 5 < \left(\frac{x}{2} + 1\right) \lg 6; \quad x(\lg 5 - \lg \sqrt{6}) < -\lg 3 + \lg 6; \quad x < \frac{\lg 2}{\lg 5 - \lg \sqrt{6}}.$$

Ответ: $x < \frac{\lg 2}{\lg 5 - \lg \sqrt{6}}$.

Замечание. Ответ может также быть представлен в другом виде, например,

$$x < \frac{1}{\log_2 5 - \log_2 \sqrt{6}} \text{ или } x < \frac{\lg 4}{\lg 25 - \lg 6}.$$

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

16 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за первые 12 месяцев нужно выплатить банку 1370 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S . По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S, \frac{23S}{24}, \dots, \frac{2S}{24}, \frac{S}{24}, 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 2 %, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$$1,02S, 1,02 \cdot \frac{23S}{24}, \dots, 1,02 \cdot \frac{2S}{24}, 1,02 \cdot \frac{S}{24}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$0,02S + \frac{S}{24}, \frac{23 \cdot 0,02S + S}{24}, \dots, \frac{2 \cdot 0,02S + S}{24}, \frac{0,02S + S}{24}.$$

За первые 12 месяцев нужно выплатить банку

$$\frac{1}{2}S + S \cdot 0,02 \left(1 + \frac{23}{24} + \dots + \frac{14}{24} + \frac{13}{24} \right) = S \left(\frac{1}{2} + \frac{37 \cdot 0,01}{2} \right) = 0,685S.$$

Значит, в кредит планируется взять $S = \frac{1370000}{0,685} = 2\,000\,000$ рублей.

Ответ: 2 000 000 рублей.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

- 17 На продолжении стороны AC за вершину A треугольника ABC отложен отрезок AD , равный стороне AB . Прямая, проходящая через точку A параллельно BD , пересекает сторону BC в точке M .
- а) Докажите, что AM — биссектриса угла BAC .
- б) Найдите площадь трапеции $AMBD$, если площадь треугольника ABC равна 180 и известно отношение $AC : AB = 3 : 2$.

Решение.

а) Обозначим $\angle BAC = \alpha$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle ABD + \angle ADB = \alpha$. Треугольник ABD равнобедренный, поэтому $\angle ADB = \angle ABD = \frac{\alpha}{2}$,

а так как AM параллельна BD , то

$$\angle MAC = \angle BDC = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \angle BAC.$$

Следовательно, AM — биссектриса угла BAC .

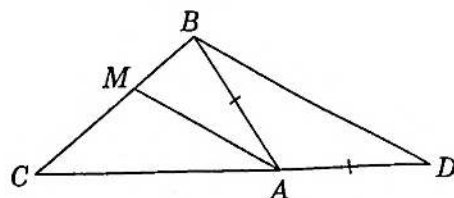
б) По свойству биссектрисы треугольника $\frac{CM}{MB} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{2}$,

значит, $\frac{S_{ACM}}{S_{ABC}} = \frac{CM}{CB} = \frac{3}{5}$, $S_{ACM} = \frac{3}{5} S_{ABC} = \frac{3}{5} \cdot 180 = 108$.

Треугольник DCB подобен треугольнику ACM с коэффициентом $\frac{5}{3}$, поэтому

$$S_{DCB} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 S_{ACM} = \frac{25}{9} \cdot 108 = 300.$$

Следовательно, $S_{AMBD} = S_{DCB} - S_{ACM} = 300 - 108 = 192$.



Ответ: 192.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

- 18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$ax^2 + 2(a+3)x + (a+4) = 0$$

имеет два корня, расстояние между которыми больше 2.

Решение.

Во-первых, должно быть $a \neq 0$, потому что иначе уравнение не будет квадратным и не будет иметь два корня.

Дискриминант уравнения $D = 4((a+3)^2 - a(a+4)) = 4(2a+9)$.

Корни уравнения равны $x_{1,2} = \frac{-2(a+3) \pm \sqrt{D}}{2a}$, а расстояние между ними $|x_2 - x_1| = \frac{2\sqrt{D}}{2|a|} = \frac{2\sqrt{2a+9}}{|a|}$. Нам нужно, чтобы это расстояние было больше 2: $\frac{2\sqrt{2a+9}}{|a|} > 2$; при

этом условии $D > 0$ можно отдельно не записывать, потому что в полученном неравенстве $2a + 9$ стоит под корнем и, значит, если a ему удовлетворяет, то заведомо $D \geq 0$, и при этом $D \neq 0$, потому что дробь в левой части больше 2.

Решим полученное неравенство. Поскольку знаменатель положителен (мы помним, что $a \neq 0$), на него можно домножить: $\sqrt{2a+9} > |a|$.

Возведём обе части неравенства в квадрат; при этом условие на ОДЗ можно отдельно не писать, потому что согласно полученному неравенству выражение $2a + 9$ будет больше неотрицательного числа: $2a + 9 > a^2$; $a^2 - 2a - 9 < 0$; $1 - \sqrt{10} < a < 1 + \sqrt{10}$.

Вспоминая требование $a \neq 0$, получаем ответ: $1 - \sqrt{10} < a < 0$; $0 < a < 1 + \sqrt{10}$.

Ответ: $1 - \sqrt{10} < a < 0$; $0 < a < 1 + \sqrt{10}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a , но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

- 19 а) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого вторая цифра в 14 раз меньше произведения двух других его цифр?
 б) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого сумма всех цифр равна 7?
 в) Найдите наибольшее кратное 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 9. Ответ обоснуйте.

Решение.

а) Например, число 847 делится на 11, а его вторая цифра 4 в 14 раз меньше произведения первой и третьей его цифр.

б) Пусть трёхзначное число имеет вид $a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c$, где a , b и c — цифры.
 Получаем:

$$a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = (a - b + c) + 11 \cdot (9a + b).$$

Значит, это число делится на 11 тогда и только тогда, когда $a - b + c$ делится на 11, то есть когда $a - b + c = 0$ или $a - b + c = 11$. Если $a + b + c = 7$, то $a - b + c = a + b + c - 2b = 7 - 2b$ — нечётное число, и, следовательно, $a - b + c = 7 - 2b = 11$. Пришли к противоречию, так как $b \geq 0$.

в) Пусть восьмизначное число n имеет вид

$$a \cdot 10^7 + b \cdot 10^6 + c \cdot 10^5 + d \cdot 10^4 + e \cdot 10^3 + f \cdot 10^2 + g \cdot 10 + h,$$

где a, b, c, d, e, f, g и h — цифры. Получаем:

$$n = 11k - (a - b + c - d + e - f + g - h),$$

где k — целое число (так как числа $10^7 + 1, 10^6 - 1, 10^5 + 1, 10^4 - 1, 10^3 + 1, 10^2 - 1$ и 11 делятся на 11). Значит, n делится на 11 тогда и только тогда, когда число

$$m = a - b + c - d + e - f + g - h$$

делится на 11 , то есть когда $m = 0, m = \pm 11, m = \pm 22$ или $m = \pm 33$.

По условию

$$a + b + c + d + e + f + g + h = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 = 37.$$

Значит, число

$$m = a + b + c + d + e + f + g + h - 2(b + d + f + h) = 37 - 2(b + d + f + h)$$

нечётное.

Поскольку

$$10 = 1 + 2 + 3 + 4 \leq b + d + f + h \leq 5 + 6 + 7 + 9 = 27,$$

имеем $-17 \leq m \leq 17$. Отсюда получаем, что $m = -11$ или $m = 11$. Во втором случае

$$b + d + f + h = 13 \text{ и } a + c + e + g = 24.$$

Этим условиям, а следовательно, и условиям задачи, удовлетворяет число 97 635 241. (Покажем, как его можно было придумать. Разрешённые нам 8 цифр нужно разбить на две группы с суммами 13 и 24. Если в одну группу взять цифры 9, 7, 6, 5, то сумма будет 27, а нам нужно 24. Кроме того, если число наибольшее возможное, то хочется, чтобы b было равно 7. Можно это сделать, заменив в большей сумме 7 на 4.)

Пусть число n — наибольшее число, удовлетворяющее условию задачи.

Поскольку $n \geq 97\,635\,241$, то

$$a = 9, b = 7, c = 6, 3 \leq d \leq 5, b + d + f + h \leq 19, m = 37 - 2(b + d + f + h) \geq -1.$$

Поэтому

$$m = 11, b + d + f + h = 13, a + c + e + g = 24 \text{ и } e + g = 9.$$

Значит, цифры e и g — цифры 4 и 5, возможно, в другом порядке, а цифры d, f и h — цифры 1, 2 и 3, возможно, в другом порядке. Среди чисел указанного вида число 97 635 241 является наибольшим, поэтому оно и является искомым.

Ответ: а) да, например, 847; б) нет; в) 97 635 241.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в и обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а и б ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ВАРИАНТ 30

Часть 2

13) а) Решите уравнение $(3^x - 6)^2 - 16|3^x - 6| = 15 - 2 \cdot 3^{x+1}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[1; 2]$.

Решение.

Преобразуем уравнение:

$$(3^x - 6)^2 - 16|3^x - 6| + 6(3^x - 6) + 21 = 0.$$

Пусть $3^x - 6 = t$.

а) При $t \geq 0$ получаем $t^2 - 10t + 21 = 0$, откуда $t = 3$ или $t = 7$, следовательно, $x = 2$ или $x = \log_3 13$.

При $t < 0$ получаем $t^2 + 22t + 21 = 0$, откуда $t = -1$ или $t = -21$, следовательно, $x = \log_3 5$.

б) Поскольку $1 = \log_3 3 < \log_3 5 < \log_3 9 = 2 < \log_3 13$, отрезку $[1; 2]$ принадлежат только корни $\log_3 5, 2$.

Ответ: а) $\log_3 5, 2, \log_3 13$; б) $\log_3 5, 2$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14) Основанием правильной треугольной пирамиды $MABC$ служит правильный треугольник ABC со стороной 6. Ребро MA перпендикулярно грани MBC . Через вершину пирамиды M и середины рёбер AC и BC проведена плоскость α .

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.

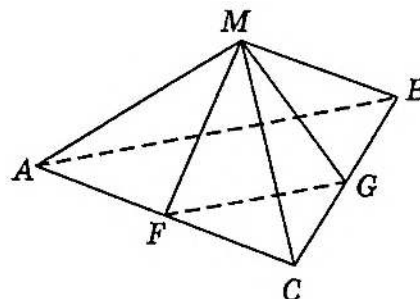
б) Найдите расстояние от вершины C до плоскости α .

Решение.

а) Обозначим F и G середины сторон AC и BC соответственно (см. рисунок).

Из условия следует, что треугольник AMC прямоугольный с прямым углом при вершине M . Поскольку пирамида правильная, все боковые грани — прямоугольные равнобедренные треугольники. Отрезок MF — медиана прямоугольного треугольника AMC , проведённая к гипотенузе, поэтому $MF = \frac{6}{2} = 3$. Ана-

логично, $MG = 3$. Кроме того, $FG = 3$, поскольку FG — средняя линия равностороннего треугольника ABC со стороной 6. Таким образом, все стороны треугольника FMG равны.



б) Искомое расстояние r найдём как высоту треугольной пирамиды $CMFG$, считая основанием сечение MFG . Объём этой пирамиды равен четверти объёма пирамиды $MABC$:

$$V_{CMFG} = \frac{1}{4} V_{MABC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot AM \cdot BM \cdot CM = \frac{1}{24} \left(\frac{6\sqrt{2}}{2} \right)^3 = \frac{9\sqrt{2}}{4}.$$

С другой стороны, $V_{CMFG} = \frac{1}{3} S_{MFG} \cdot r = \frac{1}{3} \cdot \frac{3^2 \sqrt{3}}{4} \cdot r = \frac{3r\sqrt{3}}{4}.$

Получаем: $\frac{3r\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$, откуда $r = \sqrt{6}.$

Ответ: б) $\sqrt{6}.$

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , и обоснованно получен верный ответ в пункте b	3
Получен обоснованный ответ в пункте b ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта a , и при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта a , ИЛИ при обоснованном решении пункта b получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте b с использованием утверждения пункта a , при этом пункт a не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

15) Решите неравенство $\frac{1}{\log_{(x-1)} \frac{x}{6}} \geq -1.$

Решение.

Перейдём к десятичным логарифмам:

$$\frac{1}{\log_{(x-1)} \frac{x}{6}} \geq -1; \begin{cases} \frac{\lg(x-1) + \lg \frac{x}{6}}{\lg \frac{x}{6}} \geq 0, \\ x \neq 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\lg(x-1) \frac{x}{6}}{\lg \frac{x}{6}} \geq 0, \\ x \neq 2; \end{cases} \begin{cases} \frac{(x-1) \frac{x}{6} - 1}{\frac{x}{6} - 1} \geq 0, \\ x \neq 2, \\ x > 1; \end{cases} \begin{cases} \frac{(x-1)x - 6}{x - 6} \geq 0, \\ x \neq 2, \\ x > 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x - 6} \geq 0, \\ x \neq 2, \\ x > 1; \end{cases} \begin{cases} \frac{(x+2)(x-3)}{x - 6} \geq 0, \\ x \neq 2, \\ x > 1; \end{cases} \begin{cases} \frac{x-3}{x-6} \geq 0, \\ x \neq 2, \\ x > 1; \end{cases} \begin{cases} 1 < x < 2; \\ 2 < x \leq 3; \\ x > 6. \end{cases}$$

Ответ: $(1; 2), (2; 3], (6; +\infty).$

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

- 16** По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 14 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 8 % в первый год и на целое число n процентов за второй год. Найдите наименьшее значение n , при котором за два года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Решение.

Пусть на каждый тип вклада была внесена одинаковая сумма S . На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 14 %, то есть увеличивается в 1,14 раза. Поэтому через два года сумма на вкладе «А» будет равна

$$1,14^2 S = 1,2996S.$$

Аналогично, сумма на вкладе «Б» будет равна

$$1,08 \left(1 + \frac{n}{100}\right) S,$$

где n — некоторое натуральное число процентов.

По условию требуется найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$1,08 \left(1 + \frac{n}{100}\right) S > 1,2996S;$$

$$\left(1 + \frac{n}{100}\right) > \frac{1,2996}{1,0800} = 1,203 \dots$$

При $n = 21$ неравенство

$$1,21 > 1,203 \dots$$

верно, а при $n = 20$ неравенство

$$1,20 > 1,203 \dots$$

неверно, как и при всех меньших n .

Ответ: 21.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

- 17** Окружность с центром O , вписанная в прямоугольный треугольник ABC , касается гипотенузы AB в точке M , а катета AC — в точке N , $AC < BC$. Прямые MN и CO пересекаются в точке K .

а) Докажите, что угол CKN в два раза меньше угла ABC .

б) Найдите BK , если $BC = 3\sqrt{2}$.

Решение.

а) Центр окружности, вписанной в треугольник, совпадает с точкой пересечения его биссектрис, поэтому лучи BO и CO — биссектрисы углов ABC и ACB .

Пусть $\angle ABC = 2\alpha$. Тогда $\angle BAC = 90^\circ - 2\alpha$. Из равнобедренного треугольника AMN находим, что

$$\angle ANM = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) = \frac{1}{2}(180^\circ - (90^\circ - 2\alpha)) = 45^\circ + \alpha.$$

По теореме о внешнем угле треугольника

$$\angle CKN = \angle ANM - \angle NCK = 45^\circ + \alpha - 45^\circ = \alpha = \frac{1}{2} \angle ABC.$$

Что и требовалось доказать.

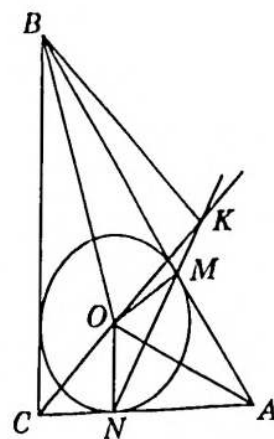
б) Пусть r — радиус вписанной окружности. Треугольник CKN подобен треугольнику CBO . Следовательно,

$$\frac{BC}{CK} = \frac{CO}{CN} = \frac{r\sqrt{2}}{r} = \sqrt{2}, \quad CK = \frac{BC}{\sqrt{2}} = 3.$$

Из треугольника CBK по теореме косинусов находим

$$BK^2 = CB^2 + CK^2 - 2CB \cdot CK \cos \angle KCB = (3\sqrt{2})^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 3^2.$$

Ответ: 3.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sin \sqrt{ax - x^2 - \pi^2} + \cos 2\sqrt{ax - x^2 - \pi^2} = 0$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Сделаем замену $y = \sqrt{ax - x^2 - \pi^2}$. Получаем:

$$\sin y + \cos 2y = 0; \quad 2 \sin^2 y - \sin y - 1 = 0,$$

откуда $\sin y = 1$ или $\sin y = -\frac{1}{2}$.

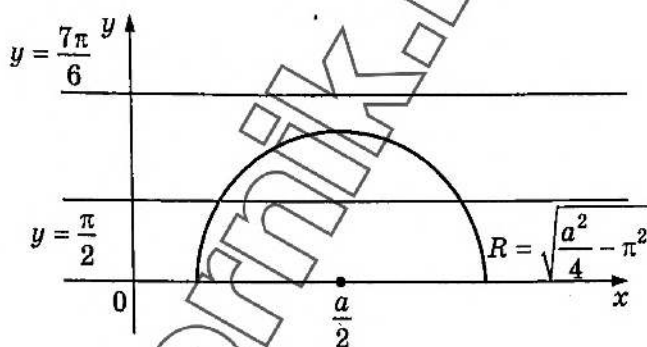
Тогда $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $y = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$ или $y = \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

При $y \geq 0$ на координатной плоскости эти уравнения определяют множество горизонтальных прямых. Две самые близкие к оси абсцисс прямые имеют уравнения $y = \frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{7\pi}{6}$.

Уравнение $y = \sqrt{ax - x^2 - \pi^2}$ запишем в виде

$$y = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \pi^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}$$

Получилось уравнение полуокружности радиусом $\sqrt{\frac{a^2}{4} - \pi^2}$ с центром, лежащим на оси абсцисс.



Данное уравнение имеет ровно два решения, если полуокружность пересекает прямую $y = \frac{\pi}{2}$, но не имеет общих точек с прямой $y = \frac{7\pi}{6}$. Запишем и решим неравенство:

$$\frac{\pi}{2} < \sqrt{\frac{a^2}{4} - \pi^2} < \frac{7\pi}{6}; \quad \frac{\pi^2}{4} < \frac{a^2}{4} - \pi^2 < \frac{49\pi^2}{36}; \quad 5\pi^2 < a^2 < \frac{85\pi^2}{9},$$

откуда $-\frac{\sqrt{85}\pi}{3} < a < -\sqrt{5}\pi$ или $\sqrt{5}\pi < a < \frac{\sqrt{85}\pi}{3}$.

Ответ: $-\frac{\sqrt{85}\pi}{3} < a < -\sqrt{5}\pi$ или $\sqrt{5}\pi < a < \frac{\sqrt{85}\pi}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a , но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

- 19) У Бори нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух из которых есть вода. За один шаг Боря переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из ведер запрещается.

а) Мог ли Боря через несколько шагов получить в одном из ведер ровно 2 литра воды, если сначала у него были ведра объёмами 4 литра и 7 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 8 литров?

б) Мог ли Боря через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех ведрах, если сначала у него были ведра объёмами 5 литров и 7 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 10 литров?

в) Сначала у Бори были ведра объёмами 3 литра и 6 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом n литров. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n , если известно, что, как бы ни старался Боря, он не сможет получить через несколько шагов ровно 4 литра воды в одном из ведер?

Решение.

а) Пусть запись (k, l, m) означает, что в ведрах объёмами 4, 7 и 8 литров находится k , l и m литров воды соответственно. Тогда Боря мог действовать так, чтобы объёмы воды в ведрах были последовательно $(4, 7, 0)$, $(0, 7, 4)$, $(0, 3, 8)$, $(3, 0, 8)$, $(3, 7, 1)$, $(4, 6, 1)$, $(0, 6, 5)$ и $(4, 2, 5)$. Во втором ведре после нескольких шагов оказалось 2 литра воды.

б) После каждого переливания либо одно из ведер становится пустым, либо одно из ведер становится полным. Если во всех ведрах оказались равные объёмы воды, то в каждом из них по 4 литра. Значит, ни одно из ведер не пусто и не полно. Пришли к противоречию.

в) Если $n \geq 9$, то объём третьего ведра не меньше, чем общий объём воды у Бори. В этом случае все возможные записи состояний объёмов воды в ведрах — это $(3, 6, 0)$, $(0, 6, 3)$, $(3, 0, 6)$, $(0, 3, 6)$, $(3, 3, 3)$ и $(0, 0, 9)$. Получить другое состояние невозможно, так как в ведрах всегда оказываются объёмы воды в литрах, кратные 3.

Приведём пример последовательных состояний для подходящих под условие переливаний в случае $n = 8$: $(3, 6, 0)$, $(3, 0, 6)$, $(1, 0, 8)$, $(1, 6, 2)$, $(3, 4, 2)$.

Этот пример показывает, что наибольшее натуральное значение может принимать n — это 8.

Ответ: а) да; б) нет; в) 8.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в и обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а и б ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ВАРИАНТ 36

Часть 2

13 а) Решите уравнение $(49^{\sin x})^{\cos x} = 7^{\sqrt{3} \sin x}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$7^{2 \sin x \cos x} = 7^{\sqrt{3} \sin x};$$

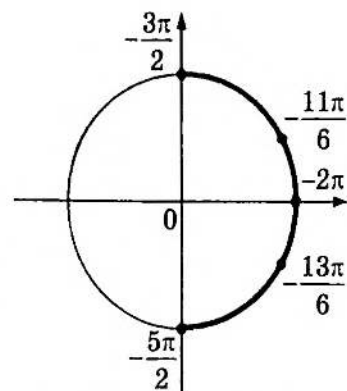
$$2 \sin x \left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0.$$

Из уравнения $\sin x = 0$ получаем $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Из уравнения $\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ получаем $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}]$. Получаем $x = -2\pi, x = -\frac{11\pi}{6}$ и $x = -\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) $\pi k; \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{6}; -2\pi; -\frac{11\pi}{6}$.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

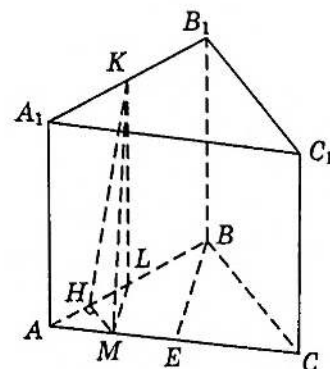
14 В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . Точка K — середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC .

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB = 8, AC = 12$ и $AA_1 = 5$.

Решение.

а) Пусть L — середина ребра AB , E — середина ребра AC . Так как треугольник ABC — равнобедренный, отрезок BE перпендикулярен отрезку AC . Поскольку $AM : MC = 1 : 3$, имеем $AM = ME$. Значит, треугольник AML подобен треугольнику AEB . Следовательно, отрезок LM перпендикулярен отрезку AC . Поскольку отрезок KL перпендикулярен плоскости ABC , получаем, что отрезок AC перпендикулярен плоскости KLM , а значит, KM перпендикулярно AC .



б) Пусть MH — высота треугольника AML . Так как плоскости ABC и ABB_1 перпендикулярны, отрезок MH перпендикулярен плоскости ABB_1 , и поэтому искомый угол равен углу HKM . Вычислим двумя способами площадь треугольника AML ; получим $2S_{AML} = MH \cdot AL = MA \cdot ML$, откуда

$$MH = \frac{MA \cdot ML}{AL} = \frac{3\sqrt{4^2 - 3^2}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{4},$$

поэтому

$$\sin \angle HKM = \frac{HM}{KM} = \frac{HM}{\sqrt{5^2 + (\sqrt{7})^2}} = \frac{3\sqrt{14}}{32}.$$

Ответ: $\arcsin \frac{3\sqrt{14}}{32}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

15) Решите неравенство $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} > \sqrt{x-2}$.

Решение.

Перенесём один из радикалов в правую часть:

$$\sqrt{x+4} > \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}.$$

Легко видеть, что ОДЗ — это луч $x \geq 2$. Если x принадлежит ОДЗ, обе части неотрицательны, поэтому их можно возвести в квадрат с сохранением равносильности:

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ x+4 > x-1+x-2+2\sqrt{(x-1)(x-2)}; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2, \\ 7-x > 2\sqrt{x^2-3x+2}. \end{cases}$$

Правая часть неравенства заведомо неотрицательна, а левая часть строго больше правой, значит надо потребовать, чтобы левая часть была положительна.

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ 7-x > 0, \\ x^2-14x+49 > 4(x^2-3x+2); \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \leq x < 7, \\ 3x^2+2x-41 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \leq x < 7, \\ -\frac{2\sqrt{31}+1}{3} < x < \frac{2\sqrt{31}-1}{3}. \end{cases}$$

Понятно, что $-\frac{1+2\sqrt{31}}{3} < 0 < 2$. Сравнивая, находим, что $2 < \frac{2\sqrt{31}-1}{3} < 7$. Следовательно,

решением неравенства является промежуток $2 \leq x < \frac{2\sqrt{31}-1}{3}$.

Ответ: $2 \leq x < \frac{2\sqrt{31}-1}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

- 16** У фермера есть два поля, каждое площадью 20 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 450 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором — 400 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 2000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 2500 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Решение.

Заметим, что на первом поле с одного гектара можно собрать либо 450 центнеров картофеля и получить 900 000 рублей, либо 250 центнеров свёклы и получить 625 000 рублей. Таким образом, нужно всё первое поле отдать под картофель. На втором поле с одного гектара можно собрать либо 300 центнеров картофеля и получить 600 000 рублей, либо 400 центнеров свёклы и получить 1 000 000 рублей. Поэтому второе поле нужно целиком отдать под свёклу.

В этом случае фермер сможет заработать

$$20 \cdot 900\,000 + 20 \cdot 1\,000\,000 = 38\,000\,000 \text{ рублей.}$$

Ответ: 38 млн рублей.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

- 17** Дан треугольник ABC . Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K , лежащей на стороне BC .

а) Докажите, что $AC^2 = BC \cdot CK$.

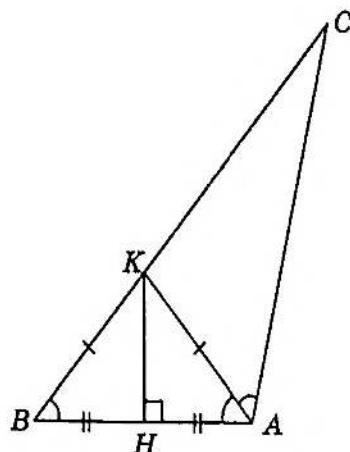
б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC , если $\sin B = 0,6$ и сторона $AC = 24$.

Решение.

а) Точка K лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB , значит, $\triangle AKH = \triangle BKH$ и $\angle ABC = \angle BAK = \angle CAK$. Треугольники ABC и KAC подобны по двум углам, поэтому $\frac{AC}{BC} = \frac{CK}{AC}$. Следовательно, $AC^2 = BC \cdot CK$.

б) Пусть $\angle KAB = \angle KBA = \beta$. Тогда

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - 0,36} = 0,8.$$



По теореме синусов $\frac{CK}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin 2\beta}$, значит, $CK = \frac{AC}{2 \cos \beta} = \frac{24}{2 \cdot 0,8} = 15$.

Используем равенство $AC^2 = BC \cdot CK$.

Поскольку $BC = BK + CK$ и $BK = AK$, получаем

$$AC^2 = (AK + CK) \cdot CK, \text{ значит, } AK = \frac{AC^2}{CK} - CK = \frac{24^2}{15} - 15 = 23,4.$$

Пусть r — радиус окружности, вписанной в треугольник AKC . Тогда

$$r = \frac{2S_{ACK}}{AK + CK + AC} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot AK \cdot \sin \beta}{AK + CK + AC} = \frac{24 \cdot 23,4 \cdot 0,6}{23,4 + 15 + 24} = 5,4.$$

Ответ: 5,4.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\log_{a-3,5}(4x^2+9) = \log_{a-3,5}(4(a-3)x+8)$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Поскольку при всех x $4x^2 + 9 > 0$, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} a > 3,5, \\ a - 3,5 \neq 1, \\ 4x^2 + 9 = 4(a-3)x + 8; \end{cases} \quad \begin{cases} a > 3,5, \\ a \neq 4,5, \\ 4x^2 - 4(a-3)x + 1 = 0. \end{cases}$$

Система имеет два различных корня, если квадратное уравнение имеет два различных корня и выполнены первые два условия. Для этого дискриминант квадратного уравнения должен быть положителен:

$$16(a-3)^2 - 16 > 0; a^2 - 6a + 8 > 0; (a-2)(a-4) > 0; a < 2 \text{ или } a > 4.$$

Учитывая первые два неравенства системы, получаем ответ: $4 < a < 4,5$ или $4,5 < a$.

Ответ: $4 < a < 4,5$; $4,5 < a$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a , но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

- 19) Конечная последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$.
- а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 5$.
- б) Может ли в такой последовательности некоторое число встретиться три раза?
- в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из двузначных чисел?

Решение.

а) Например, подходит последовательность 7, 5, 4, 4, 5.

б) При всех натуральных $k \leq n-1$ положим $b_k = a_{k+1} - a_k$. Тогда равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$ равносильно равенству $b_{k+1} = b_k + 1$. Следовательно, последовательность b_k при $1 \leq k \leq n-1$ образует арифметическую прогрессию с разностью 1.

Предположим, что некоторое натуральное число встретилось в последовательности a_k три раза. Значит, для некоторых индексов $p < q < r$ выполнены равенства $a_p = a_q = a_r$.

Поэтому выполнены равенства $0 = a_q - a_p = b_p + b_{p+1} + \dots + b_{q-1} = (q-p)b_p + \frac{(q-p)(q-p-1)}{2}$ и,

следовательно, равенство $b_p = -\frac{q-p-1}{2}$. Аналогично получаем $b_p = -\frac{r-p-1}{2}$. Приходим

к противоречию, так как $q \leq r$.

в) Как доказано в решении пункта б, последовательность $b_k = a_{k+1} - a_k$ при $1 \leq k \leq n-1$ образует арифметическую прогрессию с разностью 1.

Если существует такое k , что $b_k = 0$, то разобьём последовательность $\{a_1; \dots; a_n\}$ на две подпоследовательности $\{a_1; \dots; a_k\}$ и $\{a_{k+1}; \dots; a_n\}$. Первая монотонно убывает, так как для каждого $i < k$ выполняется соотношение $a_{i+1} - a_i = b_i < 0$. Аналогично вторая последовательность монотонно возрастает. Имеем

$$10 \leq a_k = a_1 + (b_1 + b_2 + \dots + b_{k-1}) = a_1 - (1 + 2 + \dots + k-1) = a_1 - \frac{k(k-1)}{2} \leq 99 - \frac{k(k-1)}{2}; \quad \frac{k(k-1)}{2} \leq 89,$$

следовательно, $k \leq 13$.

$$10 \leq a_k = a_n - (b_{k+1} + b_{k+2} + \dots + b_{n-1}) = a_n - (1 + 2 + \dots + n-k-1) = a_n - \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} \leq 99 - \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$$

$$\frac{(n-k)(n-k-1)}{2} \leq 89,$$

следовательно, $n-k \leq 13$. Значит, $n = (n-k) + k \leq 26$.

Если же такого k , что $b_k = 0$, нет, то последовательность $\{a_1; \dots; a_n\}$ либо монотонно возрастает, если все b_j положительны, либо монотонно убывает, если все b_j отрицательны.

В первом случае

$$10 \leq a_1 = a_n - (b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}) \leq a_n - (1 + 2 + \dots + n - 1) = a_n - \frac{n(n-1)}{2} \leq 99 - \frac{n(n-1)}{2}.$$

Во втором же

$$99 \geq a_1 = a_n - (b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1}) \geq a_n - (-(n-1) - \dots - 2 - 1) = a_n + \frac{n(n-1)}{2} \geq 10 + \frac{n(n-1)}{2}.$$

В обоих случаях $n \leq 13$.

Пример последовательности $a_k = 88 + 13(1-k) + \frac{k(k-1)}{2}$ при $1 \leq k \leq 26$ показывает, что n может равняться 26. Действительно, тогда последовательность $b_k = a_{k+1} - a_k = k - 13$ при $1 \leq k \leq 25$ образует арифметическую прогрессию с разностью 1. Значит, при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнены равенства $b_{k+1} = b_k + 1$ и $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$. Кроме того, при $1 \leq k \leq 13$ выполнены неравенства $10 = a_{13} \leq a_k \leq a_1 = 88$, а при $14 \leq k \leq 26$ выполнены неравенства $10 = a_{14} \leq a_k \leq a_{26} = 88$ и, следовательно, все члены последовательности a_k являются двузначными числами.

Значит, $n = 26$.

Ответ: а) например, подходит последовательность 7, 5, 4, 4, 5;
б) нет; в) при $n = 26$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в и обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а и б ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ОТВЕТЫ

Вариант 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4,8	23	184	0,38	0,4	3	9	44	10	240	0,5	-6

13	а) $\pi n, n \in \mathbb{Z}; \pi - \arcsin \frac{3}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $-3\pi - \arcsin \frac{3}{5}, -3\pi, -2\pi$
14	б) $\arccos \frac{14}{55}$
15	$[0; 1), (1; 1,5), (1,5; 2), (2; 3]$
16	4 млн рублей
17	б) 1 : 4
18	$-20 < a \leq -5, a = 0, a > 5$
19	а) да; б) нет; в) 22 170; 22 173; 22 176; 22 179

Вариант 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
15	8	375	0,44	0,256	2	25	-25	11	45	-2	-30

13	а) $\pi n, n \in \mathbb{Z}; \arcsin \frac{12}{13} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $2\pi, 2\pi + \arcsin \frac{12}{13}, 3\pi$
14	б) $\arccos \frac{7\sqrt{43}}{129}$
15	$\left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{6}\right), \left(-\frac{1}{6}; 0\right), \left(0; \frac{1}{6}\right]$
16	5 млн рублей
17	б) 1 : 3
18	$-8 < a \leq -3, a = 0$
19	а) да; б) нет; в) 24 360; 24 364; 24 368

Вариант 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
21	30	184	0,25	0,16	1	2	6	9	435	-1,5	-130

13	а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \left(\pi + \arccos \frac{8}{17}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}$
14	б) $\arccos \frac{23\sqrt{113}}{791}$
15	$\left[1\frac{1}{3}; 2\frac{1}{3}\right), \left(2\frac{1}{3}; 2\frac{2}{3}\right), \left(2\frac{2}{3}; 3\right), (3; 4]$
16	6 млн рублей
17	б) 1 : 2
18	$-15 < a \leq -6, a = 0$
19	а) да; б) нет; в) 15 390; 15 392; 15 394; 15 396; 15 398

Вариант 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8,4	-21	190	0,36	0,25	13	129	0	7	85	-2,5	-228

13	а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \left(\pi - \arccos \frac{24}{25}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}$
14	б) $\arccos \frac{9}{20}$
15	$[1,2; 2), (2; 2,2), (2,2; 2,4), (2,4; 3,2]$
16	5 млн рублей
17	б) 1 : 5
18	$-12 < a \leq -2, a = 0$
19	а) да; б) нет; в) 41 151; 41 154; 41 157

Вариант 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
17,5	-28	180	0,23	0,284	11	9	-10	8	185	1,5	-33

13	а) $\pi n, n \in \mathbb{Z}; \left(\pi - \arcsin \frac{21}{29}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $-\pi - \arcsin \frac{21}{29}, -\pi, 0$
14	б) $\arccos \frac{\sqrt{34}}{102}$
15	$\left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}\right), \left(\frac{2}{7}; \frac{3}{7}\right)$
16	7 млн рублей
17	б) 2 : 3
18	$-12 < a \leq -4, a = 0$
19	а) да; б) нет; в) 31 212; 31 215; 31 218

Вариант 6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
104	5	4913	0,01	0,5	1,5	14	-3	60	616	36	1

13	а) $x = \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{5\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{59\pi}{12}, \frac{61\pi}{12}, \frac{71\pi}{12}$
14	б) $\frac{6500\sqrt{3}}{3}$
15	$(-\infty; 0,5), \{1\}, (\log_4 5; +\infty)$
16	4 млн рублей
17	б) 45
18	$a = -5, a = -4, -2,4 \leq a \leq 2,4, a = 4, a = 5$
19	а) Вася, б) Вася, в) Петя

Вариант 7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
22	10	2744	0,01	-0,1	4,4	16	2	60	966	36	4

13	а) $x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{7\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$
14	б) $20\sqrt{57}$
15	$(-\infty; 0,5), \{1\}, (\log_9 11; +\infty)$
16	7 млн рублей
17	б) 24
18	$a = -25, a = -24, -14,4 \leq a \leq 14,4, a = 24, a = 25$
19	а) Петя, б) Вася, в) Петя

Вариант 8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
168	6	2197	0,99	1	9,5	5	0	60	576	16	-16

13	а) $x = \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{13\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{19\pi}{12}$
14	б) $120\sqrt{6}$
15	$(-\infty; -1), \{1\}, (\log_7 9; +\infty)$
16	4 млн рублей
17	б) 30
18	$a = -13, a = -12, -\frac{72}{13} \leq a \leq \frac{72}{13}, a = 12, a = 13$
19	а) Петя, б) Вася, в) Петя

Вариант 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
72	13	1728	0,25	-1,1	6,5	18	1	60	910	2,25	8

13	а) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{13\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$
14	б) $\frac{1250\sqrt{3}}{3}$
15	$(-\infty; -2), \{1\}, (\log_3 10; +\infty)$
16	3 млн рублей
17	б) 12
18	$a = -17, a = -15, -\frac{150}{17} \leq a \leq \frac{150}{17}, a = 15, a = 17$
19	а) Вася, б) Петя, в) Петя

Вариант 10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
20	8	8	0,02	2,1	5	27	-2	60	720	0,5625	-18

13	а) $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{13\pi}{6}$
14	б) $80\sqrt{33}$
15	$(-\infty; -\log_5 6), \{-1\}, (0; +\infty)$
16	5 млн рублей
17	б) 21
18	$a = -10, a = -6, -2,4 \leq a \leq 2,4, a = 6, a = 10$
19	а) Петя, б) Вася, в) Петя

Вариант 11

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
12	9	4	0,4	0,75	-0,2	-2	5	1,8	38	5	8

13	а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{11\pi}{3}; \frac{15\pi}{4}; \frac{13\pi}{3}$
14	б) $6\sqrt{7}$
15	$(-\infty; -2]; \frac{1}{2}; (\log_2 3; 3)$
16	1077
17	б) $\frac{21}{4}$
18	$\frac{2}{3}$
19	а) да, например при $n = 178$; б) нет; в) 1986 и 2004

Вариант 12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13,5	36	7	0,25	0,2	1,5	-1,5	4	2,4	59	-6	-6

13	а) $\pi + 2\pi n$; $\frac{\pi}{6} + \pi n$; $\frac{\pi}{3} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$; б) 3π ; $\frac{19\pi}{6}$; $\frac{10\pi}{3}$
14	б) $28\sqrt{5}$
15	$(-2; -1]$; $\frac{3}{2}$; $(2; +\infty)$
16	32 668
17	б) 12
18	0
19	а) да, например при $n = 160$; б) нет; в) 1981 и 2008

Вариант 13

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
9,6	25	1	0,2	0,4	0	-1	3	1,6	20	-12	3

13	а) $2\pi n$; $-\frac{\pi}{12} + \pi n$; $-\frac{5\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{29\pi}{12}$; $-\frac{25\pi}{12}$; -2π
14	б) $\frac{19\sqrt{11}}{5}$
15	$[-3; 0)$; $\frac{3}{2}$; $(1 + \log_5 6; +\infty)$
16	64 896
17	б) $\frac{24}{5}$
18	2
19	а) да, например при $n = 187$; б) нет; в) 1978

Вариант 14

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10,8	19	343	0,3	0,9	-1	-3	-4	2,4	28	5	2

13	а) $\pi + 2\pi n$; $\frac{\pi}{12} + \pi n$; $\frac{5\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) π ; $\frac{13\pi}{12}$; $\frac{17\pi}{12}$
14	б) $62\sqrt{2}$
15	$(-\infty; -1)$; $-\frac{1}{4}$; $[1; 2)$
16	202 875
17	б) 12
18	$\frac{3}{4}$
19	а) да, например при $n = 139$; б) нет; в) 1993 и 2011

Вариант 15

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2,8	8	64	0,1	0,5	0,5	1	2	2,25	33	-7	-3

13	а) $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{19\pi}{6}$; $-\frac{17\pi}{6}$; $-\frac{11\pi}{4}$
14	б) $51\sqrt{17}$
15	$(-\infty; -1)$; $[-0,5; \log_3 2)$; 3
16	81 120
17	б) $\frac{20}{3}$
18	$\frac{5}{3}$
19	а) да, например при $n = 188$; б) нет; в) 2009

Вариант 16

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	0,8	376	0,008	0,9	1	0	3	31	28	1,6	1

13	а) $\pm 8\pi$, $-\frac{47\pi}{6} - \pi n$; $-\frac{43\pi}{6} - \pi n$; $\frac{43\pi}{6} + \pi n$; $\frac{47\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{N}$; б) 8π ; $\frac{49\pi}{6}$; $\frac{53\pi}{6}$; $\frac{55\pi}{6}$
14	б) 45°
15	$(-\infty; -1]$; $\left[2; \log_2 \frac{12}{35}\right)$
16	4 млн рублей
17	б) $4\sqrt{5}$
18	$0 \leq a \leq 5$
19	а) 7; б) 5002; в) 5054

Вариант 17

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
74	-0,5	264	0,009	0,2	-4	-80	4	58	22	0,84	12

13	а) $\pm 8\pi$; $-\frac{47\pi}{6} + \pi k$, $-\frac{43\pi}{6} + \pi k$, $k = 0, \dots, 15$; б) -8π , $-\frac{47\pi}{6}$; $-\frac{43\pi}{6}$; $-\frac{41\pi}{6}$
14	б) $\arctg \frac{3\sqrt{37}}{37}$
15	$\left(\log_3 \frac{18}{35}; -1\right]$; $[2; +\infty)$
16	5 млн рублей
17	б) $6\sqrt{13}$
18	$0 \leq a \leq 10$
19	а) например, 54 и 63; б) нет; в) 117 или 119

Вариант 18

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
50	4	152	0,0007	0,14	7	-17	-4	45	27	-3	7

13	а) $\pm 6\pi$, $-\frac{17\pi}{3} - \pi n$; $-\frac{16\pi}{3} - \pi n$; $\frac{16\pi}{3} + \pi n$; $\frac{17\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{N}$; б) 6π ; $\frac{19\pi}{3}$
14	б) $\arctg \frac{4\sqrt{17}}{17}$
15	$\left(\log_{\frac{10}{2}} \frac{10}{29}; -1\right]$; $[1; +\infty)$
16	5 млн рублей
17	б) $12\sqrt{5}$
18	$0 < a \leq 4$
19	а) например, 15 раз число 19 и число 78; б) нет; в) 1650

Вариант 19

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	-0,6	160	0,006	0,13	-1	-3	8	62	26	-4	-14

13	а) $\pm 6\pi$, $-\frac{17\pi}{3} + \pi k$, $-\frac{16\pi}{3} + \pi k$, $k = 0, \dots, 11$; б) -6π ; $-\frac{17\pi}{3}$; $-\frac{16\pi}{3}$
14	б) $\arctg \frac{4\sqrt{13}}{13}$
15	$(-\infty; -1]$; $\left[1; \log_{\frac{5}{2}} \frac{29}{10}\right)$
16	3 млн рублей
17	б) $5\sqrt{34}$
18	$1 \leq a \leq 9$
19	а) да; б) нет; в) $38\frac{1}{7}$

Вариант 20

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
44	-7	408	0,006	0,36	-7	-112	-2	65	24	-3	6

13	а) $\pm 7\pi$, $-\frac{20\pi}{3} + \pi k$, $-\frac{19\pi}{3} + \pi k$, $k = 0, \dots, 13$; б) $\frac{20\pi}{3}$; 7π
14	б) $\arctg \frac{3\sqrt{82}}{82}$
15	$(-\infty; -1]$; $\left[2; \log_{\frac{45}{5}} \frac{45}{152}\right)$
16	4 млн рублей
17	б) $6\sqrt{10}$
18	$-3 \leq a \leq 10$
19	а) да, например, числа 4, 5 и 8; б) нет; в) $\frac{28}{19}$

Вариант 21

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	-0,8	45	0,1	1,4	35	3	2	30	8	-7	0,5

13	а) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k, -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{4}, -\frac{9\pi}{4}$
14	б) $\frac{3\sqrt{11}}{10}$
15	$x < \frac{\lg 2}{\lg 5 - \lg \sqrt{6}}$. Замечание. Ответ может также быть представлен в другом виде, например, $x < \frac{1}{\log_2 5 - \log_2 \sqrt{6}}$ или $x < \frac{\lg 4}{\lg 25 - \lg 6}$.
16	2 000 000 рублей
17	192
18	$1 - \sqrt{10} < a < 0; 0 < a < 1 + \sqrt{10}$
19	а) да, например, 847; б) нет; в) 97 635 241

Вариант 22

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	-0,28	15	0,2	1,6	75	4	1	20	9	11	1,5

13	а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}$
14	б) $\frac{3\sqrt{23}}{11}$
15	$x < -\frac{\lg 3}{\lg 5 - \lg \sqrt{3}}$. Замечание. Ответ может также быть представлен в другом виде.
16	1 800 000 рублей
17	84
18	$-2 - 2\sqrt{5} < a < 0; 0 < a < 2\sqrt{5} - 2$
19	а) да, например, 242; б) нет; в) 12 738 495

Вариант 23

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
31	-0,8	16	0,25	1,25	-12	6	2	8	40	14	11

13	а) -1; 4; $6 \pm \sqrt{22}$; б) -1; $6 - \sqrt{22}$
14	б) $\frac{9\sqrt{5}}{2}$
15	$-2 < x \leq -\frac{63}{32}$
16	2 592 000 рублей
17	6
18	$a = -\frac{5}{96}$
19	а) может; б) не может; в) $\frac{299}{201}$

Вариант 24

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
57	-0,6	49	0,2	1,5	-7	96	1,5	12	24	-10	26

13	а) -5 ; 2 ; $\frac{-1 \pm \sqrt{65}}{2}$; б) -5 ; $-\frac{1 + \sqrt{65}}{2}$
14	б) $\frac{28\sqrt{2}}{3}$
15	$-3 < x \leq -\frac{74}{25}$
16	1 597 200 рублей
17	9
18	$a = -\frac{33}{4}$
19	а) может; б) не может; в) 1,5

Вариант 25

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
80	0,6	121	0,75	1,75	3	17	1	9	44	14	17

13	а) -1 ; 5 ; $7 \pm 2\sqrt{11}$; б) -1 ; $7 - 2\sqrt{11}$
14	б) $\frac{55\sqrt{2}}{2}$
15	$-1 < x \leq -\frac{48}{49}$
16	1 555 200 рублей
17	8
18	$a = 3,5$
19	а) может; б) не может; в) $\frac{191}{141}$

Вариант 26

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
60	-23	2	0,33	4	15	-0,5	4	8	60	-16	9

13	а) 1 ; $\log_4 5$; $\log_4 9$; $\log_4 20$; б) $\log_4 20$
14	б) $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}$
15	$(2; 3)$; $(3; 4]$; $(8; +\infty)$
16	уменьшить на 10 %
17	2
18	$-\frac{2}{3} < a < 0$; $0 < a < \frac{2}{3}$
19	а) да; б) нет; в) 17

Вариант 27

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
57	-40	52	0,28	3	64	2,5	-1	2	84	-16	625

13	а) 1; $\log_5 8$; $\log_5 9$; б) 1; $\log_5 8$; $\log_5 9$
14	б) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$
15	(1; 2); (2; 5]; (20; $+\infty$)
16	уменьшить на 30 %
17	10
18	$-\frac{\sqrt{13}\pi}{3} < a < \frac{\sqrt{13}\pi}{3}$
19	а) да; б) нет; в) 11

Вариант 28

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
33	-8	30	0,32	5	2	0,75	3	9	75	-13	81

13	а) 1; $\log_3 8$; 2; б) 1
14	б) $\sqrt{3}$
15	(4; 5); (5; 6]; (12; $+\infty$)
16	2
17	6
18	$-\frac{7}{3} < a < -1$; $1 < a < \frac{7}{3}$
19	а) да; б) нет; в) 14

Вариант 29

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
30	17	4	0,013	0,2	3	1,25	5	2,5	72	9,9	8

13	а) 1; $\log_4 7$; $\log_4 10$; б) 1
14	б) $\sqrt{2}$
15	(3; 4); (4; 5]; (10; $+\infty$)
16	26
17	5
18	$\left(-2; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 2\right)$
19	а) да; б) нет; в) 5

Вариант 30

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
27	-40	20	0,035	0,24	31	-2	6	4	90	6,4	4

13	a) $\log_3 5, 2, \log_3 13$; б) $\log_3 5, 2$
14	б) $\sqrt{6}$
15	$(1; 2), (2; 3], (6; +\infty)$
16	21
17	3
18	$-\frac{\sqrt{85}\pi}{3} < a < -\sqrt{5}\pi$ или $\sqrt{5}\pi < a < \frac{\sqrt{85}\pi}{3}$
19	а) да; б) нет; в) 8

Вариант 31

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	19	32	0,6	0,6	10	10	5	3500	4	2,96	-39,5

13	а) $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$
14	б) $\frac{32\sqrt{15}}{3}$
15	$(-\infty; -4]; [-3; 0); (0; 2)$
16	800
17	б) $240\sqrt{3}$
18	$a > -1$
19	а) да; б) нет; в) 489

Вариант 32

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
12	-16	13500	0,76	0,3	34	12	4	2500	5	-1,9	14

13	а) $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$
14	б) $72\sqrt{2}$
15	$(-2; 0); \left(0; \frac{2}{3}\right]; [1; +\infty)$
16	1500
17	б) $135\sqrt{2}$
18	$a > \frac{5}{6}$
19	а) да; б) нет; в) 488

Вариант 33

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
60	-6	5324	0,28	0,8	505	70	3	3000	11	-2,12	34,5

13	а) $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{13\pi}{4}; \frac{15\pi}{4}$
14	б) $\frac{32\sqrt{3}}{3}$
15	$[-1,5; 0); (0; 2]; (5; +\infty)$
16	1200
17	б) $\frac{320\sqrt{3}}{3}$
18	$a > -1$
19	а) да; б) нет; в) 487

Вариант 34

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	8	84	0,032	0,84	8	20	0,25	400	120	0,75	9

13	а) $2\pi n, \pm \arccos \frac{1}{6} + 2\pi m, n, m \in \mathbb{Z};$ б) $-2\pi - \arccos \frac{1}{6}; -2\pi; -2\pi + \arccos \frac{1}{6}$
14	б) $\frac{10}{7}$
15	$(-\infty; -2]; 0; [1; 5)$
16	119
17	289
18	$-\frac{9}{4} < a \leq -2$
19	а) например, последовательность 1, 28, 46, 58; б) нет; в) 2

Вариант 35

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
60	-2	343	0,4	0,7	6	6	-0,75	9,8	40	-2,96	0,5

13	а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{35\pi}{6}$
14	б) $1 : 2$
15	$[\log_2 7; 6]$
16	300 000 рублей
17	$\frac{11 - 2\sqrt{10}}{3}$
18	$x = 0$ при $a = 4$
19	а) да, например, числа 7, 10 и 13; б) нет; в) $\frac{35}{24}$

Вариант 36

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
28	-6,6	1	0,0485	0,58	-1	5	6	55	50	26	-5

13	а) $\pi k; \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{6}; -2\pi; -\frac{11\pi}{6}$
14	б) $\arcsin \frac{3\sqrt{14}}{32}$
15	$2 \leq x < \frac{2\sqrt{31}-1}{3}$
16	38 млн рублей
17	5,4
18	$4 < a < 4,5; 4,5 < a$
19	а) например, подходит последовательность 7, 5, 4, 4, 5; б) нет; в) при $n = 26$

Вариант 37

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
34	0,8	2	0,039	0,42	-5	81	1	33	80	-14	3

13	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k; (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}$
14	б) $\arcsin \frac{12\sqrt{73}}{365}$
15	$2 \leq x < \frac{\sqrt{17}}{2}$
16	14,4 млн рублей
17	$3\sqrt{11}$
18	$-2 < a < -1,5; -1,5 < a$
19	а) например, подходит последовательность 5, 3, 2, 2, 3; б) нет; в) при $n = 20$

Вариант 38

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
51	-7	7	0,0476	0,28	4	49	5	37	50	27	9

13	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k; (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{3}; \frac{5\pi}{2}; \frac{8\pi}{3}$
14	б) $\arcsin \frac{12\sqrt{65}}{325}$
15	$1 \leq x < \frac{2\sqrt{13}-4}{3}$
16	15,6 млн рублей
17	$\frac{3\sqrt{5}}{2}$
18	$a < 1,5; 1,5 < a < 2$
19	а) например, подходит последовательность 8, 5, 3, 2, 2; б) нет; в) при $n = 28$

Вариант 39

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
62	4	4	0,0294	0,5	1	9	8	45	60	-61	11

13	а) πk ; $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) -2π ; $-\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$
14	б) $\arcsin \frac{6\sqrt{34}}{85}$
15	$2 \leq x < \frac{2\sqrt{31}-5}{3}$
16	9 млн рублей
17	$3\sqrt{7}$
18	$8 < a < 8,5$; $8,5 < a$
19	а) например, подходит последовательность 7, 4, 2, 1, 1; б) нет; в) при $n = 24$

Вариант 40

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
85	-7	9	0,078	0,56	5	121	4	32	40	47	-15

13	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{2}$
14	б) $\arcsin \frac{4\sqrt{253}}{161}$
15	$3 \leq x < \frac{\sqrt{89}-2}{2}$
16	17,88 млн рублей
17	4
18	$a < 5,5$; $5,5 < a < 6$
19	а) например, подходит последовательность 11, 7, 4, 2, 1; б) нет; в) при $n = 34$

Вариант 41

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	18	378	0,5	0,2	-3	229	0,4	14	15	33	-12

13	а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{21\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{2}$
14	б) $\arccos \frac{1}{3}$
15	$x < -\frac{1}{4}$, $0 < x < 2$
16	115
17	$2\sqrt{42}$
18	$a = \pm \frac{\sqrt{6}}{4}$
19	а) например, последовательность 1, 126, 151, 156, 157; б) нет; в) 4

Вариант 42

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	12	315	0,116	0,5	-6	157	8	16	20	77	-14

13	а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{7\pi}{2}; \frac{25\pi}{6}$
14	б) $\arccos \frac{\sqrt{33}}{33}$
15	$x < -1, -\frac{2}{5} < x < 0$
16	116
17	$8\sqrt{14}$
18	$a = \pm \frac{\sqrt{26}}{4}$
19	а) например, последовательность 1, 49, 73, 85, 91, 94; б) нет; в) 2

Вариант 43

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
12	7	104	0,25	0,4	-3	229	4	7	5	6,5	-11

13	а) $2\pi k, k \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{19\pi}{3}; -6\pi$
14	б) $\arccos \frac{3\sqrt{59}}{59}$
15	$-5 < x < -1, x > \frac{3}{2}$
16	118
17	$16\sqrt{7}$
18	$a = \pm 3 \frac{\sqrt{2}}{2}$
19	а) например, последовательность 1, 257, 321, 337, 341; б) нет; в) 3

Вариант 44

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	13	361	0,25	0,2	-13	634	2	33	10	-2,4	-25

13	а) $2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $2\pi; \frac{8\pi}{3}$
14	б) $\arccos \frac{\sqrt{22}}{11}$
15	$\frac{1}{3} < x < 1, x > 3$
16	113,5
17	$28\sqrt{3}$
18	$a = \pm \frac{\sqrt{33}}{2}$
19	а) например, последовательность 1, 433, 505, 517, 519; б) нет; в) 5

Вариант 45

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	11	456	0,167	0,08	-15	562	5	27	30	8	-17

13	а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) -3π
14	б) $\arccos \frac{\sqrt{19}}{19}$
15	$x < -3, 1 < x < \frac{3}{2}$
16	115
17	$14\sqrt{6}$
18	$a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$
19	а) например, последовательность 1, 344, 393, 400, 401; б) нет; в) 6

Вариант 46

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
71	9	4	0,25	0,9	-20	12	-0,5	1000	70	11	-18

13	а) -4; 0; б) 0
14	б) $\frac{21}{16}$
15	$(-6; -4], [4; +\infty)$
16	90 кг
17	13
18	$0 \leq k < \frac{4\sqrt{2}-2}{21}, \frac{4\sqrt{2}-2}{21} < k \leq \frac{1}{3}$
19	а) да, например, числа 10, 11 и 15; б) нет; в) $\frac{25}{17}$

Вариант 47

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
9	-9	63	0,25	0,64	1	0,9	1,25	84	52,8	47	7

13	а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; n \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}$
14	$\frac{15}{4}\sqrt{651}$
15	$[2; +\infty)$
16	$p = 13$
17	$\frac{11}{14}$
18	$\frac{1}{4} < a < \frac{1}{3}; a = \frac{1}{2}$
19	а) да; б) нет; в) 9

Вариант 48

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	64	57	0,32	0,51	0,4	0,1	2	70	50,4	-44	1

13	а) $\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-4\pi; -3\pi; -2\pi$
14	$9\sqrt{91}$
15	$[0; \log_2 3]$
16	$p = 11$
17	$\frac{11}{13}$
18	$-\frac{1}{2} < a < -\frac{1}{3}; a = -1$
19	а) да; б) нет; в) 8

Вариант 49

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
11	-64	48	0,5	0,36	0	-0,25	1,75	108	55	35,4	4

13	а) $\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $3\pi; 4\pi; 5\pi$
14	$24\sqrt{21}$
15	$(-\infty; -\sqrt{2}); (-\sqrt{2}; -1]; 0; [1; \sqrt{2}); (\sqrt{2}; +\infty)$
16	$p = 20$
17	$\frac{13}{14}$
18	$\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}; a = 1$
19	а) да; б) нет; в) 6

Вариант 50

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
18	-9	54000	0,2	0,22	3	16	3	0,06	25	11,2	68

13	а) $\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{3} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi; -\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}; -\pi; -\frac{2\pi}{3}$
14	б) $\operatorname{arctg} \frac{5}{4}$
15	$[-1; 0)$
16	6225
17	1 : 6
18	$-\frac{3}{5} \leq a \leq \frac{9}{10}; a \geq 1$
19	а) да; б) нет; в) $n = 5$

ВАРИАНТ 11

Часть 2

13 а) Решите уравнение $4 \sin x \cos^2 x - 1 = 2 \cos x (\sin x - 1)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$4 \sin x \cos^2 x - 1 = 2 \sin x \cos x - 2 \cos x;$$

$$2 \cos x \cdot \sin 2x - 1 = \sin 2x - 2 \cos x;$$

$$\sin 2x (2 \cos x - 1) + (2 \cos x - 1) \neq 0;$$

$$(2 \cos x - 1)(\sin 2x + 1) = 0.$$

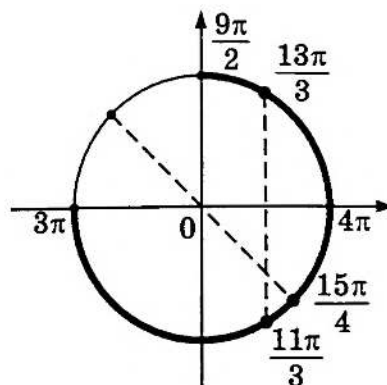
Значит, $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, или $\sin 2x = -1$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью единичной окружности отберём корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

$$4\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{3};$$

$$4\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{15\pi}{4};$$

$$4\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{3}.$$



Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$; $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{3}$; $\frac{15\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2